$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}i\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi(x) - m\,\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\alpha}[\,\partial_\mu A^\mu(x)\,]^2$$

相対論的量子場

−演算子の基礎的性質−

日置　善郎

吉岡書店

相対論的量子場

— 演算子の基礎的性質 —

日置善郎著

吉岡書店

はじめに

場の量子論は，量子力学を一通り学び終えた学生にとっての次のステップとなる量子物理学の一分野であるが，さらに広い意味で考えれば，少なくとも微視的世界の記述に関する限りは現代物理学の上級コース全体と同定しても差し支えないくらい豊富な内容を含んでいる．本書は，このように広範囲をカバーする場の量子論の中で，相対論的な場の演算子（相対論的量子場）の基本的な性質を解説することを主な目的としている．但し，一口に場の演算子とは言っても非摂動的な側面も含めた包括的な記述となれば，それは筆者の力量を遥かに超えてしまう．本書が対象とするのは，主として自由場の演算子と生成消滅演算子やファインマン伝播関数などそこに含まれる幾つかの基礎概念・基礎事項である．

特に粒子・反粒子の生成消滅演算子は,「波動場を量子化すれば粒子像が現れる」という重要な事実を表す演算子である．同様の概念はすでに量子力学における調和振動子や角運動量の取り扱いでも導入され威力を発揮しているが，正準量子化に基づく場の量子論においてはそれが系統的に導入され，特に摂動計算などにおいて中心的な役割を担う．さらに，量子体系を記述する舞台であるフォック空間の重要な構成要素でもある．その意味で，少なくとも場の量子化のエッセンスの何割かはこの生成消滅演算子に凝縮されていると言っても言い過ぎではないだろう．本書において筆者が目指したのは，この場の量子論の一つの象徴とでも言うべき生成消滅演算子の基本的な解説である．従って，通常のテキストに比べて扱う項目はかなり限定的と言えよう．

実際，現実の素粒子反応は様々な相互作用の関与があって初めて起こる訳だが，本書では，相互作用はほとんど扱っていない．まさに基礎的（入門的）事項のみに焦点を絞って解説する訳である．従って，本書を読み進める中で，素粒子物理学や場の量子論自体の研究最先端に触れられる訳ではない．卓球やテニスに例えれば，正しいフォームで基本的なフォア打ちが出来るようになることに目標を設定しており，本書を読破しても,「大会に出て勝てる」レベルにまでは達しないと言えようか．しかしながら，ある意味で退屈な基礎練習にどれ

だけの時間を費やしたかがその先の上達度に大きく影響するように，このような地味な学習も，より豊富な内容の中上級レベル場の量子論へと進んでいく為には避けて通れないステップである．また，種々の粒子間相互作用は場の演算子の積の形で与えられるので，本書の内容が理解できていたら，その応用として場の理論的に相互作用を扱うことは難しいことではない．

さらに，現代の素粒子物理学では「超対称性」が重要な役割を果たしており，超対称化された理論においては電子やミュー粒子といったレプトンに対してスレプトン，u や d といったクォークに対してはスクォークというように，既存粒子それぞれに対応して超対称パートナー粒子が登場するが，それらも本書で扱われていない全く新しい粒子（場）などではない．これら超対称粒子も（新しい量子数は付与されてはいるものの）場の量子論的には本書で扱っているスカラー場やディラック場で記述されるのである．従って，本書が有効に活用されれば相対論的な場の量子論およびそれに基づく現代素粒子物理学の基礎固めに大いに役立つはずである．

本書は筆者が徳島大学総合科学部ならびに大学院人間・自然環境研究科において行った講義ノートに基づいており，読者対象としては，主に物理学専攻の３・４年生から大学院修士課程レベルの学生諸君を念頭に置いている．従って，予備知識としては，量子力学を一通り学んでいることに加えて特殊相対性理論の基本事項（エネルギー・運動量の関係，反変・共変ベクトルの概念など）および解析力学の初歩（粒子系のラグランジュ形式）を想定した．

内容については次項「本書の構成」（iv 頁）で示すが，ここでも簡単に紹介しておこう．第 I 章では，量子力学を相対論化する試みの中で現れるクライン-ゴルドン方程式およびディラック方程式とそれらが直面した困難につき解説する．次に第 II 章では，場の量子論を記述する枠組みについての一般的な説明を与える．これに続く第 III～V 章が本編とでも呼ぶべきもので，それぞれの章においてスカラー場，ディラック場，ベクトル場の基本的性質を詳述する．最後に，付録 1 では本文中には書けなかった γ 行列関連の重要公式をまとめ，付録 2 ではディラック場の規格化につき，比較対照のため幾つかの代表的教科書における規格化方式を紹介する．なお，本文中何ヶ所かで拙著「場の量子論」（吉

岡書店）と共通する記述があるが，本書の構成を首尾一貫したものにする為ということでご了解をお願いしたい．

本書原稿の準備においては多くの方々から力をお貸し頂いた．京都大学基礎物理学研究所・教授の九後汰一郎氏には，筆者の大学院時代の先輩ということもあって筆者が理解不十分な事柄にぶつかる度につい気軽に質問してしまうが，その都度たいへん明快なお答えを頂いている．名古屋大学・名誉教授の大貫義郎先生には場の演算子の変換性につき大変親切なご教示を頂いた．筆者が，本書で扱っているような場の量子論の基礎事項に関してその重要性を認識し続けられたのは，ワルシャワ大学・教授グジョンドコウスキー (Grządkowski) 氏との共同研究に負うところが非常に大きい．福井工業大学・准教授の大熊一正氏，阿南工業高専・講師の長澤智明氏および神戸大学・大学院生の安達裕樹君からは原稿全体に亙って多くの貴重なコメントを頂いた．徳島大学総合科学部の学生だった松花文太君（現 大阪大学・大学院生）・石破利彦君（現 徳島大学・大学院生）には準備段階の原稿をセミナーで使用する中で不明確な記述や誤植を何度も指摘して頂いた．この原稿は熊本大学理学部（2007年9月）および信州冬の学校（2008年3月）での集中講義においても使用したが，その参加者から頂いた様々な質問やコメントも大変参考になった．最後になったが，本書の出版においては吉岡書店の吉岡誠社長に大変お世話になった．この場を借りて皆様に御礼申し上げる．

——— *To Hiroko + Yoshimi, Yumi & Koichiro* ———

2008年 9月　日置　善郎

本書に関する情報（補足や訂正など）につきましては
http://www.ias.tokushima-u.ac.jp/physics/theor/members/hioki-jp.html
をご覧下さい．

本書の構成

第 I 章

量子力学を相対論化する試みの中で現れるクライン-ゴルドン方程式およびディラック方程式とそれらが直面した困難につき解説する．但し，ここはあくまで場の量子論への橋渡しとしての入門的記述なので，これらの方程式自体の応用については足を踏み入れない．

第 II 章

相対論的量子力学が直面する困難の根本的な解決は，場の量子論に進んで初めて可能になる．ここでは，場の量子論を記述する枠組みとしてのラグランジュ形式，そして体系の作用積分が持つ対称性から生まれる保存則（ネータの定理），さらに場の演算子の時間発展やより広い変換性につき説明する．

第 III〜V 章

本書の中心を成す部分であり，それぞれの章においてスカラー場，ディラック場，ベクトル場の基本的性質を解説する．これらの場は数学的な性質が異なるので全く共通に扱うことはできないが，それでも「相対論的量子場（場の演算子)」という統一的な観点に立ち，説明が重複することも厭わず様々な側面から詳しい記述を試みる．

付録 1

本文中には書けなかった γ 行列関連の重要公式をまとめる．また，ディラック方程式のローレンツ変換性の議論に必要な行列についても解説する．

付録 2

ディラック場の規格化について考える．状態・演算子の規格化に関しては，本書は高エネルギー物理学の中で標準になりつつある「共変的規格化」を採用しているが，現時点ではこれが唯一の規格という訳ではない．そこで，他の方式との比較対照の助けとなるように，様々な選択肢のあるディラック場を例として幾つかの代表的教科書における規格を紹介する．

記　法

● 相対論記法

計量テンソル：　$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ の対角成分 $= (+1, -1, -1, -1)$

反変ベクトル：　$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \boldsymbol{x})$

共変ベクトル：　$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\boldsymbol{x})$

内積：　$px = p_\mu x^\mu = p^\mu x_\mu = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}p_\mu x_\nu = Et - \boldsymbol{px}$

微分記号：　$\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu = (\partial/\partial x_0, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3) = (\partial/\partial t, -\nabla)$

$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3) = (\partial/\partial t, \nabla)$

$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$

● 反変・共変ベクトルのローレンツ変換性

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu, \qquad a'_\mu = \bar{\Lambda}_\mu{}^\nu a_\nu$$

但し，二つの変換を明確に表すために Λ, $\bar{\Lambda}$ という表記を用いるが，両者は計量テンソルによる脚の上げ下げで互いに入れ換われるので中身に本質的な差はない．すなわち，a と a' の関係を添字なしで表せば $a' = \Lambda a = \bar{\Lambda} a$ である．多くのテキストでは $\bar{\Lambda}_\mu{}^\nu$ も $\Lambda_\mu{}^\nu$ と表されている．

● 運動量の 3 次元積分要素

場の演算子の平面波展開（運動量展開）に現れる 3 次元積分

$$d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \equiv d^3\boldsymbol{k}/[(2\pi)^3 2k^0]$$

これはローレンツ変換の下で不変な積分要素である：$d^3\tilde{\boldsymbol{k}} = d^3\tilde{\boldsymbol{k}}'$

本書では，原則として確定した運動量は p，積分変数としての運動量は $k, q, \cdots$ で表す．また，スピン量子数についても同様の使い分けをする．

● 共変的規格化

確定した運動量とスピン量子数を持つ 1 粒子状態の場合

$$\langle \boldsymbol{p}, s | \boldsymbol{p}', s' \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta_{ss'} \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$$

• デルタ関数

$$\delta(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{\pm ipx}, \quad \delta^4(p) = \delta(p^0)\delta(p^1)\delta(p^2)\delta(p^3)$$

• 階段関数

$$\theta(x) = 1\ (x>0\ \text{の時}),\quad = 1/2\ (x=0\ \text{の時}),\quad = 0\ (x<0\ \text{の時})$$

これを微分するとデルタ関数になる： $\delta(x) = d\theta(x)/dx$

• 単位行列・零行列

次元に関わらず，単位行列は I, 零行列は O で表すが，誤解の恐れのない場合には，単に 1, 0 と記すこともある．

• 生成消滅演算子

スカラー場・ベクトル場においては 粒子を a，反粒子を b で，ディラック場の場合は粒子を c，反粒子を d で表す．どちらの場合も $\dagger$ の無いものは消滅演算子，有るものは生成演算子である．また，例えば $a^{(\dagger)}$ は「生成演算子 $a^\dagger$ または消滅演算子 a」を意味する．

• 単位について

本書では，他の多くのテキストと同じく，ディラック定数 $\hbar\,(\equiv h/(2\pi))$ および光速 c を基準に採る自然単位系を用いる．この単位系では $\hbar$ も c も 1 という無次元の定数となる：

$$\hbar = c = 1$$

これは，単位の中に J·s を含む量を扱う場合にはその部分は $\hbar = 1.054571628 \times 10^{-34}$ J·s を基準として，また，m/s を含む量ならその部分は $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s を基準として「その何倍」という表し方をするということを意味する．例えば，v [m/s] という或る物体の速さを考えると

$$v\ [\mathrm{m/s}] = \frac{v\ [\mathrm{m/s}]}{c\ [\mathrm{m/s}]}\, c\ [\mathrm{m/s}]$$

と変形でき，右辺で v [m/s]/c [m/s] は「光速の何倍」という無次元の数値になるが，これが自然単位系でのその物体の速さである．

目　次

III. スカラー場の理論

IV. ディラック場の理論

V. ベクトル場の理論

付　録

I. 相対論的量子力学

シュレディンガー方程式を基本方程式とする量子力学体系は，相対性理論とは両立できない非相対論的体系である．このことは，特殊相対論におけるローレンツ変換が「時間座標 t と空間座標 $\boldsymbol{x}$ を同等に扱う」こと，及びシュレディンガー方程式は「t については1階微分しか含んでいないのに，$\boldsymbol{x}$ については2階の微分を含む」ことを考え合わせれば明らかである．しかしながら，光子以外の粒子も光速に近い速さをもち得る高エネルギー素粒子反応を高精度で記述しようとすれば，量子論に相対論の要請を取り入れることは不可欠である．この章では，相対論的な場の量子論への入り口として，そのような相対論的量子力学の基本事項を学ぶことにしよう．なお，ここで言う相対論とは「特殊相対論」である．通常の素粒子反応においては重力の影響は無視できるし，また理論的にも量子論と一般相対論の融合は遥かに複雑な課題なのでここでは扱わない．

I.1 クライン-ゴルドン方程式

量子論･相対論の両方の原理を満たす**相対論的量子力学**（Relativistic quantum mechanics）の基本方程式はどのようなものだろうか．その手掛かりは，非相対論的量子力学（Non-relativistic quantum mechanics）の基本方程式であるシュレディンガー方程式（Schrödinger equation）の構成に見出せる：自由粒子の波動関数（Wave function）が従う

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = H\psi(\boldsymbol{x},t) \qquad (H = -\Delta/[2m])$$

を例として考えてみよう．[♯I.1] この方程式は，古典力学（Classical mechanics）における自由粒子のエネルギーと運動量の関係

[♯I.1] 自然単位系（Natural units）$\hbar = (c =)1$ を用いていることに注意．

$$E = \boldsymbol{p}^2/[\,2m\,]$$

の両辺において E と $\boldsymbol{p}$ を

$$E \to i\partial/\partial t, \qquad \boldsymbol{p} \to -i\nabla \tag{I.1}$$

と置き換え，それを波動関数に作用させることで得られる．すなわち，これが古典力学からシュレディンガー方程式を導く「量子化（Quantization）」の基本的手続きであり，冒頭の問いを考えるための一つの指針を与えてくれる．

そこで，上の手続き（I.1）を相対論的力学における E と $\boldsymbol{p}$ の関係

$$E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

に適用してみよう．但し，根号を含むままの形では見通しが立たないので，それを二乗した

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$$

を用いることにする．すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x}, t) = (\,\Delta - m^2\,)\psi(\boldsymbol{x}, t)$$

或いは，ダランベール演算子（d'Alembertian）$\Box \equiv \partial^2/\partial t^2 - \Delta$ を用いて

$$(\,\Box + m^2\,)\psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{I.2}$$

という方程式に到達する．これは**クライン-ゴルドン方程式**（Klein-Gordon equation）という名で知られる方程式で，現在では，相対論的場の量子論（Relativistic quantum field theory）において質量 m の自由なスカラー（Scalar）粒子（場）を記述する役割を担っている（スカラー粒子・場の詳しい解説は III 章で行う）．

この方程式は，登場した時には冒頭のシュレディンガー方程式と同じく一つの粒子の振る舞いを記述する波動方程式として捉えられた．しかし，そのよう

な見方をすると，これは二つの深刻な問題を内包する非現実的な方程式と結論せざるを得ないことが明らかになった．その一つとは**確率保存則**（Conservation of probability）の問題であり，もう一つは**負エネルギー解**（Negative energy solutions）の問題である．

確率保存則の問題

非相対論的量子力学においては，**確率密度**（Probability density）は

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=|\psi(\boldsymbol{x},t)|^2$$

で，また**確率流密度**（Probability current density）は

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{i}{2m}\left[\,\psi^*(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{x},t)-\psi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{grad}\,\psi^*(\boldsymbol{x},t)\,\right]$$

で与えられ，これらは確率保存則の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t)+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{I.3}$$

を満たす．事実，この方程式が正しいことはシュレディンガー方程式とその複素共役

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t)=H\psi(\boldsymbol{x},t),\qquad i\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\boldsymbol{x},t)=-H\psi^*(\boldsymbol{x},t)$$

を用いれば容易に確認できる．逆に言えば，この関係が成立することが $\rho,\boldsymbol{j}$ をそれぞれ確率密度，確率流密度として解釈できることを保証している．

これに対して，クライン-ゴルドン方程式の場合は $\partial^2\psi/\partial t^2$ しか与えられないため，$\rho=|\psi|^2(=\psi^*\psi)$ と定義すると $\partial\rho/\partial t$ の計算に現れる $\partial\psi^*/\partial t$，$\partial\psi/\partial t$ がうまく扱えない．そこで，この問題を回避しようとすれば，ρ を

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=\frac{i}{2m}\left[\,\psi^*(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t)-\psi(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\boldsymbol{x},t)\,\right]$$

という形で再定義することが考えられる．実際，この ρ に対しては $\partial\rho/\partial t$ は ψ と $\partial^2\psi/\partial t^2$ のみで表され，先に導入した $\boldsymbol{j}$ と共に確率保存則と同じ形の方程式を満たすようになる．

問題 I.1　上のように ρ を定義し直せば，確率保存の式 (I.3) も成立するようになることを確かめよ．

では，これで一件落着かと言うと，そうではない．確率密度という解釈が成り立つためには ρ は常に正または 0 であることが必要だが，上の ρ の形は，$|\psi|^2$ という形とは異なりその条件が満たされることを保証するようには見えない．実際，クライン-ゴルドン方程式は t について 2 階の微分方程式だから，それが解けたときには初期条件として例えば $t=0$ における ψ と $\partial\psi/\partial t$ は自由に設定できるため，ρ は負の値もとり得ることになる．これが確率保存則の問題（困難）である．

負エネルギー解の問題

クライン-ゴルドン方程式の平面波（Plane wave）解 $\psi(\boldsymbol{x},t)=A(p)e^{-ipx}$ を考えてみよう．ここで p, x はそれぞれ 4 元運動量（Four-momentum）$p^\mu=(E,\boldsymbol{p})$ と時空座標（Space-time coordinates）$x^\mu=(t,\boldsymbol{x})$，px は両者の内積 $px\equiv p_\mu x^\mu=Et-\boldsymbol{px}$ であり，また，$A(p)$ は x には依存しない定数（但し p には依存して構わない）である．すると，e^{-ipx} を実際に $(\Box+m^2)\psi(\boldsymbol{x},t)=0$ に代入してみれば容易にわかるように，エネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ の関係として

$$E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\qquad\text{または}\qquad E=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\tag{I.4}$$

が要求される．従って，前者は正エネルギー（$E\geq m$）の解だが，後者は負のエネルギー（$E\leq -m$）という非現実的な状態を与えることになる．[♯I.2] では，これを非物理的な解として捨てればよいかと言えば，そうはいかない．何故なら $e^{i(\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}t+\boldsymbol{px})}$ は互いに独立な解であり，この二つが存在してはじめて一般解が両者の重ね合わせとして表現できるからである．これが負エネルギー解の問題（困難）である．

[♯I.2] 非相対論的な量子力学では，例えば井戸型ポテンシャル（Square well potential）などの束縛状態（Bound state）において $E<0$ の粒子も登場する．しかし，その E は原点を自由に選べる位置エネルギーも含めた量なのでここでの問題と同じではない．

問題 I.2　(I.4) 式の関係があれば，$\psi(\boldsymbol{x},t)=A(p)e^{-ipx}$ はクライン-ゴルドン方程式の解となることを確認せよ．

I.2 ディラック方程式

ディラック（Dirac）は，確率保存則問題を解決するため，相対論的粒子の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ が従う方程式としてクライン-ゴルドン方程式の他にもう一つ t に関する 1 階微分しか含まない方程式が存在すると考えて，それを以下のように導いた．

仮定:　波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ は，クライン-ゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x},t)=(\,\Delta-m^2\,)\psi(\boldsymbol{x},t)$$

に加えて

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t)=H\psi(\boldsymbol{x},t),\qquad H=\boldsymbol{\alpha p}+\beta m \tag{I.5}$$

（$\boldsymbol{p}=-i\nabla$）という時間・空間座標ともに 1 階微分の方程式を満たす．ここで $\boldsymbol{\alpha}$，β は当然のことながらハミルトニアン（Hamiltonian）H のエルミート性（Hermiticity）を保証する量でなければならない．∎

上記の係数 $\boldsymbol{\alpha}$，β がどのような量かを調べるために，(I.5) の第 1 式を $\partial\psi/\partial t=-iH\psi$ と書き直してもう一度 t で微分すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x},t)=-iH\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t)=(-iH)^2\psi(\boldsymbol{x},t)=-H^2\psi(\boldsymbol{x},t)$$

ψ はクライン-ゴルドン方程式も満たすのだから，二つの方程式が両立するためには

$$-H^2\psi(\boldsymbol{x},t)=(\,\Delta-m^2\,)\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{I.6}$$

でなければならない．この段階では，未知係数 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)$，$\beta$ はどのような量か全くわからないので，その掛け算順序もそのままに保ち H^2 を計算す

ると

$$\begin{aligned} H^2 = (\boldsymbol{\alpha p} + \beta m)^2 &= (\sum_i \alpha_i p_i + \beta m)(\sum_i \alpha_i p_i + \beta m) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j p_i p_j + m \sum_i \alpha_i \beta p_i + m \sum_i \beta \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 \\ &= \sum_i \alpha_i^2 p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j + m \sum_i \{\alpha_i, \beta\} p_i + \beta^2 m^2 \end{aligned}$$

（但し，$\{\ ,\ \}$ は反交換子（Anticommutator）$\{A, B\} \equiv AB + BA$ を表す）となるので，$\Delta = \nabla^2 = -\sum_i p_i^2$ と書き直して（I.6）式の両辺を比較することにより

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i, \beta\} = 0 \ (i \neq j)$$

或いは，これをまとめて

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1 \tag{I.7}$$

$(i, j = x, y, z)$ という条件を得る．

従って，$\boldsymbol{\alpha}$，β は共に通常の数係数ではないと結論される．実は，これに類似の関係は，すでに非相対論的量子力学においても電子スピンの記述の中に現れていた．つまり，**パウリ行列**（Pauli matrices）

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I.8}$$

が

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

$(i, j = x, y, z)$ という関係を満たしていた.[♯I.3] この三つの行列は全てエルミート行列（Hermitian matrix）なので，もしも例えば σ_i と α_i を同定できるならハミルトニアンのエルミート性も破れない．しかし，実際には，2行2列の行列の枠組で考える限り，ここにもう一つ σ_i と反可換な行列 β を加える余地はない．

[♯I.3] 右辺は厳密には $2\delta_{ij}\mathrm{I}$（I＝単位行列）だが，ここでは I は省略した（vi 頁の記法参照）．

問題 I.3　$\sigma_{x,y,z}$ 全てと反可換であり，かつ二乗して I（単位行列）になるような 2 行 2 列の行列は存在しないことを示せ．

それでは 3 行 3 列の行列はどうだろうか．その可能性を調べるために α_i の固有値（Eigenvalue）と固有ベクトル（Eigenvector）を a_i，$\boldsymbol{u}_i$ と，また β の固有値と固有ベクトルを b，$\boldsymbol{v}$ と表そう：

$$\alpha_i \boldsymbol{u}_i = a_i \boldsymbol{u}_i, \qquad \beta \boldsymbol{v} = b\boldsymbol{v}$$

すると，$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$ より $a_i^2 = b^2 = 1$ となるので $a_i = b = \pm 1$ であることがわかる．この場合も α_i，β はエルミート行列でなければならないので対角化可能のはずであり，$a_i = b = \pm 1$ は，実際に両行列が対角化されたとき，その対角成分は全て $+1$ または -1 ということを意味する．一方，α_i の跡（固有和）は，$\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i$ と $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$ の条件および跡の性質 $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$ を用いて

$$\mathrm{Tr}\,\alpha_i = \mathrm{Tr}(\alpha_i\beta^2) = -\mathrm{Tr}(\beta\alpha_i\beta) = -\mathrm{Tr}(\beta^2\alpha_i) = -\mathrm{Tr}\,\alpha_i$$

なるので $\mathrm{Tr}\,\alpha_i = 0$ であるとわかり，全く同様の式変形で $\mathrm{Tr}\,\beta = 0$ も示せる．しかし，行列の対角化において跡は不変であることを考えればそれは不可能である．つまり，± 1 の値しかとらない量を三つ（一般には奇数個）足しても 0 は得られない．従って，α_i，β は 3 次の行列のみならずどんな奇数次行列でもあり得ないと結論できる．

結局，α_i，β は 4 次以上の偶数次行列ということになるが，解答を先に述べれば，4 行 4 列において

$$\alpha_{x,y,z} = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_{x,y,z} \\ \sigma_{x,y,z} & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{I.9}$$

（ここでは 2 次の単位行列と零行列を I と O で表している）という形が条件

(I.7) を満たす.[♯I.4] また，これらの $\alpha_{x,y,z}$，β は全てエルミート行列

$$\alpha_{x,y,z}^{\dagger} = \alpha_{x,y,z}, \qquad \beta^{\dagger} = \beta$$

であるから，ハミルトニアンのエルミート性も保証される．従って，この $\boldsymbol{\alpha}$ と β を用いれば新しい方程式（I.5）を確定できる．

問題 I.4 (I.9) 式で与えた $\alpha_{x,y,z}$，β は（I.7）の反交換関係を満たすことを確かめよ．

このように導入された方程式が**ディラック方程式**（Dirac equation）であり，$\boldsymbol{\alpha}$，β が 4 次の行列であることに伴い波動関数 ψ も 4 行 1 列の行列で表されることになる：

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_2(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_3(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_4(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \tag{I.10}$$

この ψ は**スピノル**（Spinor：正確にはディラックスピノル）と呼ばれ，4 成分の量ではあっても 4 元ベクトルとは異なる数学的性質を持つことが後に示される．

ディラック方程式と確率保存則

ディラック方程式の発見により，確率保存則の問題は解決されるのだろうか．1 成分の波動関数の場合の確率密度 $\rho = \psi^* \psi$ の自然な拡張は $\psi^\dagger \psi (= \sum_{i=1}^{4} \psi_i^* \psi_i \geq 0)$ だから

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \psi(\boldsymbol{x}, t) \tag{I.11}$$

と仮定して，その時間微分を計算してみよう．すると，

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\boldsymbol{x}, t) = -i \boldsymbol{\alpha} \nabla \psi(\boldsymbol{x}, t) + m \beta \psi(\boldsymbol{x}, t)$$

より

[♯I.4] 実際にはこれらを任意のユニタリ行列（Unitary matrix）U を用いて変換した $U^\dagger \alpha_i U$，$U^\dagger \beta U$ も同じ条件を満たすので（I.9）は唯一の表現ではないが，話をわかりやすくするため以下ではこの標準的表現に固定する．もちろんどの表現を選んでも（途中の計算は別として）物理的な帰結には影響しない．

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{\alpha}\nabla\psi(\boldsymbol{x},t) - im\beta\psi(\boldsymbol{x},t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t) = -\nabla\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\alpha} + im\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\beta$$

だから，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t) &= \Big[\,\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\,\Big]\psi(\boldsymbol{x},t) + \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\Big[\,\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t)\,\Big]\\ &= -[\,\nabla\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\alpha} - im\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\beta\,]\psi(\boldsymbol{x},t)\\ &\quad - \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)[\,\boldsymbol{\alpha}\nabla\psi(\boldsymbol{x},t) + im\beta\psi(\boldsymbol{x},t)\,]\\ &= -[\,\nabla\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\,]\boldsymbol{\alpha}\psi(\boldsymbol{x},t) - \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\alpha}[\,\nabla\psi(\boldsymbol{x},t)\,]\\ &= -\mathrm{div}\Big[\,\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\alpha}\psi(\boldsymbol{x},t)\,\Big]\end{aligned}$$

となる．従って，仮定通りに $\rho = \psi^\dagger\psi\,(\geq 0)$ を確率密度と定義し，同時に

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\alpha}\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{I.12}$$

を確率流密度と解釈すれば，確率保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{I.13}$$

が成立することになる，すなわち，クライン-ゴルドン方程式が直面した二つの問題の一つは見事に解決される．

ディラック方程式と負エネルギー解

次に，クライン-ゴルドン方程式で行ったように，ディラック方程式の平面波解を調べてみよう．確定した運動量に対する平面波の一般形は，$w(p)$ を x には依存しないスピノルとして $\psi(x) = w(p)e^{-ipx}$ と表される．これを（I.5）式に代入すると

$$(\,E - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p} - m\beta\,)w(p) = 0$$

となるが，この方程式が $w(p)=0$ 以外の物理的に意味のある解を持つためには，その係数行列 $E-\boldsymbol{\alpha p}-m\beta$ の行列式が0でなければならない：

$$|E-\boldsymbol{\alpha p}-m\beta|=\begin{vmatrix} E-m & -\boldsymbol{p\sigma} \\ -\boldsymbol{p\sigma} & E+m \end{vmatrix}=0 \tag{I.14}$$

この左辺は4次の行列式でそのまま計算するには少々複雑なので，z 軸を $\boldsymbol{p}$ の向きに選び $p\equiv|\boldsymbol{p}|$ とおいて $\boldsymbol{p}=(0,0,p)$ とする．すると上記の行列式は

$$\begin{vmatrix} E-m & 0 & -p & 0 \\ 0 & E-m & 0 & p \\ -p & 0 & E+m & 0 \\ 0 & p & 0 & E+m \end{vmatrix}$$

となるので，余因子による展開は

$$(E-m)\begin{vmatrix} E-m & 0 & p \\ 0 & E+m & 0 \\ p & 0 & E+m \end{vmatrix} - p\begin{vmatrix} 0 & -p & 0 \\ E-m & 0 & p \\ p & 0 & E+m \end{vmatrix}$$

となる．これより

$$(E^2-p^2-m^2)^2=(E^2-\boldsymbol{p}^2-m^2)^2=0$$

を得る．従って，再び

$$E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \qquad \text{または} \qquad E=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{I.15}$$

という解に直面する．ディラック方程式もやはり負エネルギー解という深刻な問題を抱えているのである．

I.3 ディラック方程式の共変性

上記のように，ディラック方程式が導入されても負エネルギー解の問題は未解決のまま残る．実は，これは“ディラック方程式”とか“クライン-ゴルドン方

程式”という特定の方程式の困難というより，むしろ $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ という関係から出発する相対論的粒子の波動方程式が共通に直面する困難である．そして，これは，より広い枠組“場の量子論”に進んではじめて解決され，同時にそこから“**反粒子**（Antiparticle）”の存在が極めて自然な形で予言されることになるのだが，その議論は暫く保留にして，ここでディラック方程式がローレンツ変換（Lorentz transformation）の下でどのように振る舞うのかを調べておこう．この作業は場の量子論に進むための準備としても重要である．

なお，これ以降は4次元的な**共変形式**（Covariant formalism）を基本とし，時空座標 t，$\boldsymbol{x}$ やエネルギー・運動量 E，$\boldsymbol{p}$ も個別に書くのではなく相対論的表記 x（または x^μ）$= (x^0, x^1, x^2, x^3)$，p（または p^μ）$= (p^0, p^1, p^2, p^3)$ を用いて話を進める．

まず，この方程式自体もその変換性が議論しやすい共変形式に書き直そう．そのような表現の重要性は同じ形式による自由電磁場のマクスウェル方程式（Maxwell equations）

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0$$

で確認できる．[♯I.5] このように表現された方程式はローレンツ変換の下で共変的であると一目でわかるのである．これを見るために，4元ベクトル x の反変（Contravariant）・共変成分の変換性（Transformation property）を

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad x'_\mu = \bar{\Lambda}_\mu{}^\nu x_\nu$$

と表そう．すると，内積 $x_\mu x^\mu$ の不変性（Invariance）より Λ と $\bar{\Lambda}$ は

$$\bar{\Lambda}_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$$

という関係にあることがわかり，これらの関係式およびベクトル場の変換性 $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$，$A'_\mu(x') = \bar{\Lambda}_\mu{}^\nu A_\nu(x)$ より $\partial'_\mu = \bar{\Lambda}_\mu{}^\nu \partial_\nu$，$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma$

[♯I.5] 4元テンソル（Four-tensor）$F^{\mu\nu}$ は，4元ベクトル（Four-vector）である電磁場 A^μ を用いて $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ と定義される（V.1「無質量ベクトル場の古典論」参照）．

$F^{\rho\sigma}(x)$ であることから，$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)=0$ ならば変換後においても

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu}(x') = \underbrace{\bar{\Lambda}_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma}_{\delta^\rho_\sigma} \Lambda^\nu{}_\delta \partial_\rho F^{\sigma\delta}(x) = \Lambda^\nu{}_\delta \underbrace{\partial_\rho F^{\rho\delta}(x)}_{0} = 0 \tag{I.16}$$

と直ちに結論できる.[♯I.6]

ディラック方程式においては，まず係数行列の再構成が必要である．この目的のため

$$\gamma^0=\beta,\ \ \gamma^1=\beta\alpha_x,\ \ \gamma^2=\beta\alpha_y,\ \ \gamma^3=\beta\alpha_z$$

と置く．つまり，

$$\begin{aligned} &\gamma^0=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I} \end{pmatrix}, &&\gamma^1=\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_x \\ -\sigma_x & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \\ &\gamma^2=\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_y \\ -\sigma_y & \mathrm{O} \end{pmatrix}, &&\gamma^3=\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_z \\ -\sigma_z & \mathrm{O} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{I.17}$$

すると，この四つの行列 $\gamma^{0,1,2,3}$（γ 行列と総称）は

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{I.18}$$

という反交換関係（Anticommutation relation）を満たす．$\boldsymbol{\alpha}$，β 行列の表現と同じように，この反交換関係を満足する γ 行列の表現も（I.17）からのユニタリ変換でいくらでも得られるが，その中で（I.17）は γ^0 が対角的な表示として よく用いられ，**標準表示**または**ディラック表示**と呼ばれている．

問題 I.5　反交換関係（I.18）が成立することを確かめよ．

これを用いれば，ディラック方程式は

$$\Big(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\Big)\psi(x) = 0$$

♯I.6 ここでは A^μ がベクトル場として変換されることを前提に $\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$ の共変性 (Covariance) を示しているが，これは逆に「マクスウェル方程式に共変性を要請すれば A^μ にはベクトル場としての変換性が必要となる」ことを示す議論と見ることもできる．

或いは，$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ と略して

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{I.19}$$

となる．これで共変形式への書き換えという第一段階の作業は完了した．

但し，ディラック方程式の場合は，それが「一見」共変的な形に表されたとしても，それで自動的にローレンツ変換の下での共変性が保証される訳ではない．何故なら，この方程式は，変換性がまだ明らかでない量「スピノル」で表現されているからである．

ディラック方程式が本当に共変的かどうかは，二つの慣性系（Inertial system）から見たスピノル $\psi'(x')$ と $\psi(x)$ が論理矛盾などを引き起こすことなく

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{I.20}$$

という形で結ばれ，かつ

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0, \qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

が同時に成立するかどうか，[♯I.7] 言い換えれば，この条件を満たす S が存在するかどうかで決まる．すなわち，そのような S が見出されれば，それを用いた (I.20) 式がスピノルの変換性として定義でき，逆にそのような S は存在しないとわかれば，ディラック方程式は共変的ではないと結論される訳である．

そこで，変換後の方程式 $(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0$ に $\partial'_\mu = \bar{\Lambda}_\mu{}^\nu \partial_\nu$ と $\psi'(x') = S\psi(x)$ を代入し，両辺に左から S^{-1} を作用させた式を変換前の $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ と比較しよう．この段階では S と $\bar{\Lambda}$ の交換可能性はまだ不明だが，$\bar{\Lambda}_\mu{}^\nu$ は $\bar{\Lambda}$ の単なる一成分なので演算順序に問題はない．その結果，$\gamma^\nu = \bar{\Lambda}_\mu{}^\nu S^{-1}\gamma^\mu S$ という関係が得られるが，これは $\bar{\Lambda}_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ を思い出せば，

$$\gamma^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) \tag{I.21}$$

♯I.7 ここで第 1 の方程式において何故 γ^μ が γ'^μ となっていないのかと疑問に思う読者もいるかも知れない．この点については 30 頁の「理論体系の不変性に関する補足」を参照のこと．

と変形できる．これが S の満たすべき条件であり，これが成り立てば

$$\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') = S(\Lambda)\, \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \tag{I.22}$$

という関係式が導かれる．すなわち，(I.21) は「ディラック方程式の第1項（**運動項**：Kinetic term）が第2項（**質量項**：Mass term）と同じ変換性を示すべし」という要請である．

変換が微小であるとして，そのような S を探してみよう．連続的に変化するパラメータ（連続パラメータ）で規定される変換（**連続変換**：Continuous transformation）の場合には，一般の変換は微小（Infinitesimal）変換（その連続パラメータが微小である変換）の積み重ね（積分）で得られるから，議論を微小変換に限定しても一般性は失われない．

変換パラメータが0という極限を考えれば，当然 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ の $\Lambda^\mu{}_\nu$ は恒等変換 $g^\mu{}_\nu (= \delta^\mu_\nu)$ になるから，任意の微小ローレンツ変換は，$\Lambda^\mu{}_\nu$ と $g^\mu{}_\nu$ の差（微小量）を $\delta\omega^\mu{}_\nu$ と表して

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu$$

つまり

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \tag{I.23}$$

と書ける．このとき，この式を $g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$ の x' に代入すると

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + (\delta\omega_{\mu\nu} + \delta\omega_{\nu\mu}) x^\mu x^\nu$$

となるので，ローレンツ変換の下での内積の不変性 $g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ より $\delta\omega_{\mu\nu}$ は添字の入れ換えに対して反対称（Antisymmetric）

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$$

でなければならない．つまり，$\delta\omega_{\mu\nu}$ は2階の反対称テンソルである．一方，$\psi(x)$ の微小変換については，その変換行列 S を微小パラメータ $\delta\omega_{\mu\nu}$ の1次まで展

開してその係数（行列）を $S^{\mu\nu}$ と表すことにする．つまり，

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = (1 + S^{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu})\psi(x) \tag{I.24}$$

すると，$\delta\omega_{\mu\nu}$ の反対称性より $S^{\mu\nu}$ も反対称ということが要求される．

これらの微小変換の表現を（I.21）式に代入し添字を付け替えると

$$([\, S^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\,] + g^{\alpha\mu}\gamma^\nu)\delta\omega_{\mu\nu} = 0$$

となり，$\delta\omega_{\mu\nu}$ が任意の（微小）変換パラメータであることより $S^{\mu\nu}$ が満たすべき関係として

$$[\, S^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\,] + g^{\alpha\mu}\gamma^\nu = 0 \tag{I.25}$$

または，$S^{\mu\nu}$ が μ，ν について反対称であることを明示する形として

$$2[\, S^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\,] + g^{\alpha\mu}\gamma^\nu - g^{\alpha\nu}\gamma^\mu = 0 \tag{I.26}$$

が得られる．ここで，$S^{\mu\nu}$ は「$\psi(x)$ に作用するのだから γ 行列の組み合わせであろう」ことも考え合せると

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}i[\, \gamma^\mu, \gamma^\nu\,]$$

と置いて

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}i\sigma^{\mu\nu} \tag{I.27}$$

すなわち，

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{1}{4}i\sigma^{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu} \tag{I.28}$$

という解に到達する.[♯I.8] 従って，確かに必要な条件を満足する S は存在し，その中身から ψ は 4 元ベクトルとは異なる変換を受けることがわかる．また，これより S は

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \tag{I.29}$$

[♯I.8] ここでの説明では（I.27）の $S^{\mu\nu}$ が（I.26）を満足することは理解できても「それ以外の解がないのかどうかは不明確」と不満に思う読者もいるだろう．この点については付録 1 において議論する（165 頁参照）．

を満たすことも容易に確かめられる（この関係はIV章で使用される）．

問題 I.6　$S^{\mu\nu}$ の具体形（I.27）が（I.26）の関係を満たすことを確かめよ．

問題 I.7　$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ の関係を確かめ，これを用いて（I.29）の関係を導け．その際，$S(\Lambda) = 1 + S^{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu}$ ならその逆変換（Inverse transformation）は $S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1}) = 1 - S^{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu}$ と与えられることに注意せよ．

なお，ここでは，多くの読者は「クライン-ゴルドン方程式やディラック方程式のような運動方程式が最も基本的な法則」という考え方に慣れていることを想定して，そのように話を進めたが，理論的には最も基本的な量はラグランジアン（Lagrangian）を時間積分した作用積分（Action integral）であり，次章の**ネータの定理**（Noether's theorem）で述べるように，体系の不変性は作用の不変性で決まる．但し，ローレンツ変換も含め物理的に重要な多くの変換においては，作用の不変性はラグランジアンの不変性や運動方程式の不変性・共変性と実質的に同じ意味を持っているので，運動方程式を中心とした議論を行っても間違った結論に達する心配はないと思って差し支えない．

I.4 反粒子と荷電共役変換

既に述べたように，反粒子の系統的な記述は場の量子論の枠内ではじめて可能となるが，今の段階でもある程度の扱いはできるので簡単に紹介しておこう．そのような考察は，のちに場の量子論において粒子-反粒子の関係を扱う際にも有用である．

古典物理学において電磁場中の荷電粒子の運動を扱うときには，そのハミルトニアンの中の粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}$ に置き換えられる．但し，ここで e は荷電粒子の電荷，$\boldsymbol{A}$ は電磁場のベクトルポテンシャルである．これに対応して，量子力学では $-i\nabla \ \rightarrow -i\nabla \ - e\boldsymbol{A}$ という置き換えが，更には相対論的量

子力学では $i\partial^\mu \to i\partial^\mu - eA^\mu$ という置き換えが必要となる．従って，電荷 e，質量 m を持つスカラー粒子の波動関数 $\phi(x)$ のクライン-ゴルドン方程式は，電磁場 A^μ の中においては

$$\Big[\,(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2\,\Big]\phi(x) = 0 \tag{I.30}$$

となる．

ここで，この方程式の両辺の複素共役をとってみよう．すると，電磁場が**実ベクトル場**（Real vector field）であることに注意して

$$\Big[\,(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu) + m^2\,\Big]\phi^*(x) = 0 \tag{I.31}$$

という方程式が得られる．これは，$\phi^*(x)$ が電荷 $-e$，質量 m のスカラー粒子を表すこと，つまり，ϕ が記述する粒子に対する反粒子であることを示している．

同様の考察をディラック方程式に対して行ってみよう．まず，電磁場中を運動する電荷 e，質量 m の粒子のディラック方程式

$$\Big[\,\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m\,\Big]\psi(x) = 0 \tag{I.32}$$

の複素共役をとる：

$$\Big[\,\gamma^{\mu *}(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m\,\Big]\psi^*(x) = 0$$

しかしながら，これをそのまま (I.32) 式と比較してもスカラー粒子のときのような明快な結論は出せそうにないので，少し工夫が必要である．γ 行列の複素共役については，先に示した標準表示では γ^2 の成分だけが純虚数で $\gamma^{0,1,3}$ の成分は全て実数であるから，$\gamma^{0,1,3*} = \gamma^{0,1,3}$，$\gamma^{2*} = -\gamma^2$ である．これに注意して上式の両辺に左から $i\gamma^2$ を掛ける：

$$i\gamma^2\Big[\,\gamma^{\mu *}(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m\,\Big]\psi^*(x) = 0$$

更に，$\gamma^2\gamma^{0,1,3} = -\gamma^{0,1,3}\gamma^2$ を用いれば，

$$\Big[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m\Big]i\gamma^2\psi^*(x) = 0$$

を得る．これは，$i\gamma^2\psi^*$ が電荷 $-e$，質量 m の粒子，つまり反粒子を表す波動関数であることを示している.[♯I.9] 通常，これを ψ^c と表す：

$$\psi^c(x) = i\gamma^2\psi^*(x) \tag{I.33}$$

これは $C \equiv i\gamma^2\gamma^0$，$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$ とおいて

$$\psi^c(x) = C\bar{\psi}^t(x) \tag{I.34}$$

（右辺の "t" は転置行列を意味する）とも表される．ここで導入した C は**荷電共役**（Charge conjugation）行列と呼ばれ，またスカラー粒子など他の粒子の場合も含め，粒子と反粒子を入れ換える変換は荷電共役変換（略してC変換）と呼ばれている（この変換については後で詳述する）．

なお，通常のディラックスピノルで記述される粒子（**ディラック粒子**）は，C変換を受けたら反粒子に置き換わるのだから勿論 $\psi \neq \psi^c$ である．しかしながら，電荷を持たない中性粒子の場合は，反粒子が粒子自身に等しいことも理論的には可能である．そのような粒子，すなわち

$$\psi^c(x) = \psi(x) \tag{I.35}$$

を満たすような粒子を**マヨラナ粒子**（Majorana particle）と呼ぶ．

☆☆☆ 負エネルギー解に関する補足 ☆☆☆

クライン-ゴルドン方程式，そしてディラック方程式の負エネルギー解を考えた時，それを簡単に「非現実的な状態」と呼んで，それ以上の具体的な問題点は述べなかったので，ここで補足説明をしておこう．

♯I.9 虚数単位 i は単なる位相因子（Phase factor）なので不可欠ではないが，これを含めるのが標準的定義となっている．

もし粒子に許される状態が $E_+ = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ だけなら，エネルギーが最低の状態はもちろん $\boldsymbol{p} = 0$ つまり $E_+ = m$ で与えられる静止状態である．これが最も安定な状態であることも容易に理解できる．しかし，もしも $E_- = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ の方も解として許されるなら $|\boldsymbol{p}|$ が大きいものほど E_- は小さくなるから，安定に静止している粒子も何らかの相互作用の結果，E_+ の最小値（m）と E_- の最大値（$-m$）の差額 $2m$ を例えば光の形で放出して負エネルギー状態に落ち込むと考えられる．しかも，一旦その状態になると E_- には最小値がない（或いは最小値は $-\infty$）ため，連続的にエネルギーを放出し続けて（エネルギー的に）奈落の底に落ち込むという正に「非現実的な状態」となる訳である．

ディラックは，全ての負エネルギー状態は既に電子で埋め尽くされており，パウリの排他原理により E_+ 状態の電子が新たに E_- 状態に遷移することは禁止されると仮定した．更に，もし E_- 状態の電子が E_+ 状態に移るなら，その空席は電子とは逆符号の電荷を持つ粒子として振る舞うと考えて「反粒子（陽電子：Positron)」の存在を予言した．

これが偉大な研究成果であることは疑う余地もない．ただ,「電子が充満した真空って …?」という素朴な疑問・感想は別として，この「空孔理論」もボーズ統計に従う粒子には適用できないので，クライン-ゴルドン方程式も基礎方程式であると見る立場では根本的な解決策にはならない．

☆☆☆ ☆☆☆

♠♠ ちょっと息抜き：　LaTeX は万能？ ♠♠

すでに多くの方々はお気づきと思うが，本書原稿はすべて LaTeX で作成した．筆者が初めて LaTeX（の前身の TeX）に接したのは 1986 年スタンフォード大学に滞在中だった．新しいものが苦手な筆者も「これは絶対にマスターせなアカン！」と強く感じたのははっきりと憶えているし，今では研究活動にも教育活動にも欠かせないシステムとなっている．もっとも，あるポーランド人の知人（≠ iii 頁のG氏）の警告（？）によれば “どんなに中身のない話でも British accent だと素晴らしく響くし，どんなにつまらない論文でも LaTeX で書かれていれば立派に見える” ということらしい（^_^;)．そう，LaTeX はあくまで手段に過ぎない．中身を決めるのは我々だってことを常に意識しないと！

♣♣♣♣

II. 相対論的場の理論の基礎

クライン-ゴルドン方程式およびディラック方程式は，非相対論的量子力学におけるシュレディンガー方程式と同じく1粒子（電子）の運動を記述する方程式として出発した．そこでは $\psi(x)$ の役割は確率密度を決定する波動関数であった．しかしながら，既に見たように，そのような考え方では，クライン-ゴルドン方程式は確率保存則と負エネルギー解の問題に直面し，確率保存則とは共存できるディラック方程式も負エネルギー問題は解決できないことが明らかとなった．

前章でも簡単に述べたように，この問題の起源は $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ というエネルギーと運動量の相対論的な関係である．ところが，同じく相対論的な方程式であるマクスウェル方程式を基本法則とする電磁気学にそのような問題はない．その理由は，古典論の段階では電磁場は純粋な波動であり，(後に詳しく解説するように）量子化された後は，任意個数の光子からなる状態をまとめて扱うことのできる多体系の量子理論となるため1体問題には無縁だからである．従って，クライン-ゴルドン方程式およびディラック方程式についても，その方程式に従う確率波動 $\psi(x)$ 自体を電磁場のように量子化（第2量子化）することで1体問題から脱却でき，上記問題も解決できる理論体系に進化できると期待される．つまりは，相対論的量子力学から相対論的場の量子論へ進むのである．ここではそのための一般的枠組を学ぶことにしよう．

II.1 場のラグランジュ形式

相対論的場の量子論を包括的に記述できる一つの代表的枠組は，すでに古典力学（解析力学）においても用いられている**ラグランジュ形式**（Lagrange formalism）である．この節では，この形式における場の記述について概観する．

まずは粒子系の力学の簡単な復習から始めよう．この立場では，どんな物理系もそれに固有の**ラグランジアン** L というスカラー量で規定され，この L は，

系の状態を記述する**一般化座標**（Generalized coordinate）q_i とその時間微分 $\dot{q}_i$（$i = 1 \sim n$: n はその系の自由度）の関数とされる：

$$L = L(q,\, \dot{q}) \equiv L(q_1, \cdots, q_n,\, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$$

また，これはエネルギーを表す関数であるハミルトニアンと直接的に結びつくので，実関数（量子化後はエルミート演算子）でなければならない．この L を任意の時刻 t_1 から t_2 まで積分した量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\, \dot{q})$$

は作用または作用積分と呼ばれ,「自然界に実際に現れる $q_i(t)$ の関数形は，この作用積分 I の値を最小にするものである」という表現で種々の基本的物理法則を統一的に記述するのが**最小作用の原理**（Principle of least action），実際に $q \to q + \delta q$，$\dot{q} \to \dot{q} + \delta\dot{q}$ という変分（Variation）の下で $\delta I = 0$ という条件を I に課した結果生まれるのが**ラグランジュ方程式**（Lagrange equation）

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Bigl(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Bigr) = 0 \tag{II.1}$$

である．

このラグランジュ形式を多粒子系に適用するとき，そのラグランジアンは，もし粒子同士が相互作用をしていなければ

$$L = \sum_i L(q_i,\, \dot{q}_i) \tag{II.2}$$

という形をとる．ここで，右辺の $L(q_i,\, \dot{q}_i)$ は，1 自由度の場合のラグランジアンである．このことを参考にすると，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{H}$ のような，拡がった領域に連続的に分布する場の系もラグランジュ形式で記述できるようになる．

ここでは，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ やその他の場をまとめて一般的に ϕ と記すことにしよう．点 $\boldsymbol{x}$，時刻 t での場を $\phi(\boldsymbol{x},\, t)$ で表そうという訳である．さて，ここでの空間

座標 $\boldsymbol{x}(=(x,y,z))$ は，粒子の記述に用いられる座標（上記の q）と同じ意味を持つのだろうか？ 答えは否である．粒子の座標 q は，一般には時間と共に変化するその粒子の存在場所を示しており，さらに $\dot{q}$ は速度，$\ddot{q}$ は加速度を与えるというように座標 q は粒子の運動に関する全ての情報を保持する物理量である．従って，特に質点の場合には粒子そのものと言ってもよい．ところが，場の中に現れる座標 $\boldsymbol{x}$ は，単に自由度としての空間の点を区別するパラメータに過ぎない．つまりは，多粒子系において座標に付けられた添字 i と同じである．では，粒子座標 q に対応する量は何かと言うと，それは場 ϕ 自身である．例えば電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ であれば（$\boldsymbol{x}$ でも t でもなく）正に $\boldsymbol{E}$ そのものが時刻 t，位置 $\boldsymbol{x}$ における電場の強さと向きという物理量を表しているのである．

従って，上記（II.2）に対応するこの系のラグランジアン（場のラグランジアン）は，$\boldsymbol{x}$ で区別される各 ϕ を記述するラグランジアン的な関数の総和の形をとる．但し，添字 i が離散的であるのに対し，パラメータとしての座標 $\boldsymbol{x}$ は連続的なので，この総和は $\boldsymbol{x}$ についての積分を用いて与えられることになる．相対論的表記に移行し 4 元座標 $x^\mu=(t,\boldsymbol{x})$ を簡単に x と表せば，その形は

$$L=\int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{L}(\phi(x),\,\partial_\mu\phi(x)) \tag{II.3}$$

である.[♯II.1] この右辺に現れた $\mathcal{L}$ が上述の各 ϕ を記述する関数で，**ラグランジアン密度**（Lagrangian density）と呼ばれている.[♯II.2] ここで，体積積分はもちろん場 ϕ が 0 でない値をとる領域全体に亙って実行される．

この系において，前述の粒子系の

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)=0$$

[♯II.1] 時間座標と空間座標が同等に扱われる相対論的な理論では，$\dot{q}$ に対応する量は，一般に $\partial_\mu\phi(x)(\equiv\partial\phi(x)/\partial x^\mu)$ となる．

[♯II.2] 実際には，これも簡単にラグランジアンと呼ばれることも多い．以下でも特に厳密な区別はしない．

に対応するラグランジュ方程式は，自由度を表すパラメータが（i のような離散量ではなく）連続量 $\boldsymbol{x}$ であることより

$$\frac{\delta L}{\delta\phi(x)} - \partial_\alpha \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha\phi(x))} = 0 \tag{II.4}$$

という変分形式の方程式となる．これは以下のように導かれる： まず，$\phi \to \phi + \delta\phi$，$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi + \delta\partial_\mu\phi\,(= \partial_\mu\delta\phi)$ という場の任意の変分を考え（但し，$\delta\phi$ は時空積分の境界では 0 と約束する），変分法の公式に従って I の変分を

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\boldsymbol{x} \Big[\frac{\delta L}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha\phi(x))}\partial_\alpha\delta\phi(x) \Big]$$

と表す．次に，右辺の被積分関数第 2 項を

$$\partial_\alpha \Big[\frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha\phi(x))}\delta\phi(x) \Big] - \partial_\alpha \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha\phi(x))}\delta\phi(x)$$

と書き直し，はじめの項の ∂_α を時間成分と空間成分に分けるとその積分は

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt} \int d^3\boldsymbol{x} \Big[\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)}\delta\phi(x) \Big] + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\boldsymbol{x} \sum_i \partial_i \Big[\frac{\delta L}{\delta(\partial_i\phi(x))}\delta\phi(x) \Big]$$

と表され，どちらも境界での変分の条件（後者の体積積分についてはガウスの定理を用いて表面積分に書き直す）により 0 となることがわかる．この結果，

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\boldsymbol{x} \Big[\frac{\delta L}{\delta\phi(x)} - \partial_\alpha \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha\phi(x))} \Big] \delta\phi(x)$$

となり，$\delta\phi$ が任意の変分であることより [　] 内 $= 0$，つまりラグランジュ方程式（II.4）が得られるという訳である．

なお，この変分方程式（II.4）は，ϕ の任意の汎関数 $\int d^3\boldsymbol{x}\, F(\phi(x))$ に関する変分の公式

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int d^3\boldsymbol{x}' F(\phi(x')) = \frac{\partial}{\partial\phi(x)} F(\phi(x))$$

により

$$\frac{\partial}{\partial\phi(x)} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) - \partial_\alpha \Big[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi(x))} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \Big] = 0 \tag{II.5}$$

と $\mathcal{L}$ についての通常の微分方程式に書き直すことができる．

問題 II.1　方程式（II.5）は，作用 I を

$$I = \int d^4x\,\mathcal{L}(\phi(x),\,\partial_\mu\phi(x))$$

のように $\mathcal{L}$ についての 4 次元積分の形に表してそこで $\delta I = 0$ を考えることにより直接導くこともできる．これを実際の計算で確認せよ．

同様に，この場合の ϕ に共役な**一般化運動量**（Generalized momentum）$\pi(x)$ は

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)} \tag{II.6}$$

と変分形式で導入されるが，これも上記の公式に従って

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(\phi(x),\,\partial_\mu\phi(x)) \equiv \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(\phi(x),\,\dot{\phi}(x),\,\partial_i\phi(x)) \tag{II.7}$$

$(i = 1, 2, 3)$ のように通常の微分に書き直すことができ，これを用いて**ハミルトニアン密度**（Hamiltonian density）$\mathcal{H}$ とハミルトニアン H は

$$\mathcal{H}(\pi(x),\,\phi(x),\,\partial_i\phi(x)) = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi(x),\,\dot{\phi}(x),\,\partial_i\phi(x)) \tag{II.8}$$

$$H = \int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{H}(\pi(x),\,\phi(x),\,\partial_i\phi(x)) = \int d^3\boldsymbol{x}\,\pi(x)\dot{\phi}(x) - L \tag{II.9}$$

と与えられる．勿論（II.8）・(II.9）の中では，全ての $\dot{\phi}(x)$ は，$\pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}(x)$ を $\dot{\phi}(x)$ について解いた $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\pi,\,\phi,\,\partial_i\phi)$ で置き換えられている．

更に，場が幾つかの成分を持っていたり，異なる種類の場が共存しているような場合には，その一つ一つの自由度（a）に対して（II.5）が成り立ち，また，$\mathcal{H}$ を与える（II.8）式の右辺第 1 項は，全ての自由度についての和となる．すなわち，ラグランジアン密度，ハミルトニアン密度をそれぞれ $\mathcal{L}(x)$, $\mathcal{H}(x)$ と略記すれば

$$\frac{\partial}{\partial\phi_a(x)}\mathcal{L}(x) - \partial_\alpha\Big[\,\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi_a(x))}\mathcal{L}(x)\,\Big] = 0 \tag{II.10}$$

$$\mathcal{H}(x) = \sum_a \pi_a(x)\dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x) \tag{II.11}$$

である.

II.2 対称性と保存則：ネータの定理

物理学における基本的な法則は，しばしば「ある物理量が時間的に不変である」という保存法則（保存則）の形で表される．一例として，量子力学における確率保存則を考えてみよう．すでにクライン-ゴルドン方程式の導入時に述べたように，この法則の数式的表現は，確率密度 ρ と確率流密度 $\boldsymbol{j}$ の間に

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(x) = 0$$

という関係が成立するというものである．実際，この系における粒子発見の全確率 P は ρ を全空間に亙って積分したもの

$$P = \int d^3\boldsymbol{x}\;\rho(x)$$

であるが，上の ρ-$\boldsymbol{j}$ 関係が成り立てば，P の時間微分はガウスの定理を用いて

$$\frac{dP}{dt} = \int d^3\boldsymbol{x}\;\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) = -\int d^3\boldsymbol{x}\;\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(x) = -\int dS\;\boldsymbol{j}(x)\cdot\boldsymbol{n}_s$$

（$\boldsymbol{n}_s$ は微小面積要素 dS の単位法線ベクトル）となるので，無限遠方で波動関数（従って確率流密度）が 0 になるなら $dP/dt = 0$，つまり P は保存量になるという訳である.

確率密度および確率流密度を組み合わせて $j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ と 4 元カレント密度を導入すると，上記の確率保存則の式は

$$\partial_\mu j^\mu(x)\,(\equiv \partial j^\mu/\partial x^\mu\,) = 0 \tag{II.12}$$

という共変的な形になり，その保存カレント j^μ の第 0 成分 j^0 の空間積分が保存量を与えるということになる.

ネータの定理

物理系の一般的な性質を調べる上で，その系が持つ対称性（不変性），つまりある変換の下でその系が不変であるという性質，は極めて重要な役割を果たす．実際に何か具体的な計算を行うときには一つの座標系を設定しその枠内で作業を進めるので，そのような変換が特に重要であるとは実感できない読者もいるかも知れない．しかしながら，系が様々な変換の下で不変という条件はその系のラグランジアンの形に強い制限を与え，結果として多くの不定要素を取り除くのに大いに役立つのである.♯Ⅱ.3

体系が持つ対称性は，理論が完成したあとで発見されることもあれば理論構築に臨んで積極的に要請（仮定）される場合もある．いずれにせよ，それが連続変換であるなら，それに対応して一つの**保存カレント**（Conserved current）・**保存量**（Conserved quantity）が存在する，すなわち一つの保存則が成立することが知られている．これを保証するのがネータの定理である．

ネータの定理: 系を記述する作用積分が，ある連続変換に対して不変であるとき，それに対応して一つの保存カレント・保存量が存在する．∎

以下，この定理が一般的に成り立つことを示そう．14 頁で述べたように，連続変換の場合，その性質を調べるには微小変換を考えれば十分であるので，n 個の微小パラメータ $\delta\omega_i$（$i = 1 \sim n$）で指定される変換

$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \qquad \delta x^\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i^\mu(x)\delta\omega_i \tag{II.13}$$

を考え，それに対応して場 $u_a(x)$ が

$$u_a(x) \quad \rightarrow \quad u'_a(x') = u_a(x) + \delta u_a(x) \tag{II.14}$$

と変換されるとする．微小変換であれば $u_a(x)$ の変化分 $\delta u_a(x)$ も変換パラメー

♯Ⅱ.3 系の変換という場合，実際に体系を動かす**能動的**（Active）**変換**と体系を記述する基準（座標系）を逆に動かす**受動的**（Passive）**変換**の二通りがあり，実際にどちらも様々なテキストで採用されているが，重要なのは体系と座標系の相対的な関係であり，通常は二つの見方に本質的な差はないので，ここでは一貫して受動的変換の立場で話を進める．

タに比例するはずだから

$$\delta u_a(x) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{ai}(x)\delta\omega_i \tag{II.15}$$

と表そう.[♯II.4] このとき，作用積分 I が不変という条件は

$$\delta I = \int_{\Omega'} d^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^4x\, \mathcal{L}(x) = 0$$

但し，Ω，Ω' は変換前と変換後の積分領域であり，また，

$$\mathcal{L}'(x') \equiv \mathcal{L}(u'_a(x'), \partial'_\mu u'_a(x')), \qquad \mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(u_a(x), \partial_\mu u_a(x))$$

である.[♯II.5]

上記の δI の右辺第 1 項において積分変数を x'^μ から x^μ に変えると

$$\int_{\Omega'} d^4x'\, \mathcal{L}'(x') = \int_{\Omega} d^4x\, \mathcal{L}'(x+\delta x) \left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right|$$

となり，ここで δx^μ が微小量であることを考えて 2 次以上の項を落とせばヤコビアン（Jacobian）$\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)/\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)$ は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \\
&\equiv \begin{vmatrix}
1+\partial(\delta x^0)/\partial x^0, & \partial(\delta x^0)/\partial x^1, & \partial(\delta x^0)/\partial x^2, & \partial(\delta x^0)/\partial x^3 \\
\partial(\delta x^1)/\partial x^0, & 1+\partial(\delta x^1)/\partial x^1, & \partial(\delta x^1)/\partial x^2, & \partial(\delta x^1)/\partial x^3 \\
\partial(\delta x^2)/\partial x^0, & \partial(\delta x^2)/\partial x^1, & 1+\partial(\delta x^2)/\partial x^2, & \partial(\delta x^2)/\partial x^3 \\
\partial(\delta x^3)/\partial x^0, & \partial(\delta x^3)/\partial x^1, & \partial(\delta x^3)/\partial x^2, & 1+\partial(\delta x^3)/\partial x^3
\end{vmatrix} \\
&= \left(1+\frac{\partial}{\partial x^0}\delta x^0\right)\left(1+\frac{\partial}{\partial x^1}\delta x^1\right)\left(1+\frac{\partial}{\partial x^2}\delta x^2\right)\left(1+\frac{\partial}{\partial x^3}\delta x^3\right) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu
\end{aligned} \tag{II.16}$$

[♯II.4] ここでは変換パラメータ $\delta\omega$ が一つの通し番号 $i(=1,2,\cdots n)$ で順序づけられていると想定しているが，変換によってはそのパラメータに複数の添字が付与されていることもある．例えばそれが (i,j) なら δx^μ と $\delta u_a(x)$ はそれぞれ

$$\delta x^\mu = \sum_{i,j} X^\mu_{ij}(x)\delta\omega_{ij}, \qquad \delta u_a(x) = \sum_{i,j} \Psi_{aij}(x)\delta\omega_{ij}$$

という表現になる．もちろん添字を $(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (2,1), \cdots$ のように並べてそれを改めて $1, 2, \cdots$ という通し番号で置き換えることも出来るが，習慣ということもあり必ずしもそのような置き換えが便利とも限らない．

[♯II.5] 何故 $\mathcal{L}'(x')$ が $\mathcal{L}'(u'_a(x'), \partial'_\mu u'_a(x'))$ ではなく $\mathcal{L}(u'_a(x'), \partial'_\mu u'_a(x'))$ なのか（つまり，何故 $\mathcal{L}$ の関数形は不変なのか）についてはこの節の末尾（30 頁）で議論する．

となるので，

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_\Omega d^4x \left[\mathcal{L}'(x+\delta x)\Big(1+\partial_\mu \delta x^\mu\Big) - \mathcal{L}(x) \right] \\ &= \int_\Omega d^4x \left[\mathcal{L}'(x+\delta x) - \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x)\partial_\mu \delta x^\mu \right]\end{aligned}$$

と変形できる．但し，ここで $\mathcal{L}'(x+\delta x)$ と $\mathcal{L}(x)$ の差および $\partial_\mu \delta x^\mu$ はどちらも微小量であることより $\mathcal{L}'(x+\delta x)\partial_\mu \delta x^\mu = \mathcal{L}(x)\partial_\mu \delta x^\mu$ と置けることを利用した．この被積分関数の中の $\mathcal{L}'(x+\delta x) - \mathcal{L}(x)$ を

$$\mathcal{L}'(x+\delta x) - \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x+\delta x) - \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$$

と書き直し，ここでも $\mathcal{L}'(x)$ と $\mathcal{L}(x)$ の差は微小量であることに注意すれば，第 1·2 項 $\mathcal{L}'(x+\delta x) - \mathcal{L}'(x)$ は

$$\mathcal{L}'(x+\delta x) - \mathcal{L}'(x) = \partial_\mu \mathcal{L}'(x)\, \delta x^\mu = \partial_\mu \mathcal{L}(x)\, \delta x^\mu$$

となる．また，第 3·4 項 $\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$ に関しては，u'_a と u_a の同一引数での差

$$\bar{\delta} u_a(x) \equiv u'_a(x) - u_a(x)$$

を導入すれば，[♯II.6] <u>この変分 $\bar{\delta}$ と微分 ∂_μ は交換可能</u>なので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) &= \sum_a \Big[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial u_a(x)} \bar{\delta} u_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta}(\partial_\mu u_a(x)) \Big] \\ &= \sum_a \Big[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta} u_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))} \partial_\mu \bar{\delta} u_a(x) \Big]\end{aligned}$$

となる．但し，2 番目の等号において（第 1 項に対して）ラグランジュ方程式を用いた．従って，両者を合わせて δI の被積分関数に戻せば

$$\delta I = \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \Big[\sum_a \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta} u_a(x) + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \Big]$$

[♯II.6] これは u'_a と u_a の関数形の差を与える微小量であり，リー（Lie）微分と呼ばれる．実は，場のラグランジュ方程式を導く際に用いる変分 $\delta\phi(x)$ はこちらに対応する量なので，その意味ではこのリー微分を $\delta u_a(x)$ と表すべきという主張もあろうが，ここでは $x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu$ に直接対応する $u'_a(x') - u_a(x)$ を $\delta u_a(x)$ と表しているので，リー微分は $\bar{\delta}$ で示した．

を得る．更に，(II.14) より

$$\begin{aligned}\bar{\delta}u_a(x) &\equiv u'_a(x) - u_a(x) = u_a(x-\delta x) + \underbrace{\delta u_a(x-\delta x)}_{\delta x\text{ は無視できる}} - u_a(x)\\ &= -\partial_\mu u_a(x)\,\delta x^\mu + \sum_{i=1}^{n}\Psi_{ai}(x)\delta\omega_i\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\Big[\,\partial_\mu u_a(x)X_i^\mu(x) - \Psi_{ai}(x)\,\Big]\delta\omega_i\end{aligned}$$

であるから，

$$\theta_i^\mu(x) \equiv \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))}\Big[\,\partial_\nu u_a(x)X_i^\nu(x) - \Psi_{ai}(x)\,\Big] - \mathcal{L}(x)X_i^\mu(x) \tag{II.17}$$

$(i = 1 \sim n)$ と置いて

$$\delta I = -\int_\Omega d^4x \sum_{i=1}^{n}\partial_\mu\theta_i^\mu(x)\delta\omega_i$$

となる．

これが任意の微小パラメータ $\delta\omega_i$ に対して 0 になるなら，それぞれの i に対して

$$\int_\Omega d^4x\,\partial_\mu\theta_i^\mu(x) = 0 \tag{II.18}$$

でなければならない．更に，ここでの 4 次元積分の中の時間成分は作用積分のものであること，つまり任意の区間に亙って行われていることを考えれば，

$$\int d^3\boldsymbol{x}\,\partial_\mu\theta_i^\mu(x) = 0$$

でなければならないことがわかるが，この節のはじめに述べた確率保存則を思い出せば，これは

$$\Theta_i \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\,\theta_i^0(x) \tag{II.19}$$

が保存量であることを意味する．従って，確かに保存則が存在することがわかった．

ここで更に，全体系だけでなく任意の部分系も同じ対称性を持つこと，言い換えれば（II.18）式が（時間積分だけでなく）空間積分に関しても任意の積分領域で成り立つことを要請すれば，その被積分関数自体が0ということになる．すなわち，θ_i^μ は

$$\partial_\mu \theta_i^\mu(x) = 0 \tag{II.20}$$

を満たす保存カレントとなる．このカレント θ_i^μ は**ネータカレント**（Noether current）と呼ばれている．本書が対象としている場の理論体系は，そのラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ が一点の座標 x のみに依存する局所場の理論（Local field theory）なので，このように部分系にも対称性を要求することは決して不自然なことではない．実際，このあと第III〜V章で扱うスカラー場・ディラック場・ベクトル場はどれも重要な変換に対してこの要請を満たす．

問題 II.2　式（II.16）において実際に4次の行列式を余因子展開し2次以上の微小量を落とすことにより，ヤコビアン $= 1 + \partial\delta x^\mu/\partial x^\mu$ となることを確認せよ．

☆☆☆ 理論体系の不変性に関する補足 ☆☆☆

変換を受けたディラック方程式において何故 γ 行列には「$'$」が付かないのか？，そして変換後のラグランジアン（密度）が何故 $\mathcal{L}'(u'_a(x'), \partial'_\mu u'_a(x'))$ ではなく $\mathcal{L}(u'_a(x'), \partial'_\mu u'_a(x'))$ なのか？といった疑問は，実は筆者自身が院生時代に頭を悩ませた疑問だった．あれこれ考えてみても納得できる答えは見つからなかった．ただ，周辺の方々にとっては，どうして筆者がそんな疑問を持つのかが不思議だったようだが．

それから何十年か経過した今の筆者の見解は次のようなものである：一般論から言えばやはり「$'$」は必要だろう．しかし，例えばローレンツ変換の下で不変な理論体系を探しているのに，もしも変換前と変換後の座標系において最適な方程式の数係数（γ 行列）やラグランジアンの関数形自体が異なるのなら，それだけで両座標系は区別可能ということになってしまう．これは「全ての慣性座標系は同等」という特殊相対性原理に反する結論である．従って，座標系の変換前後でこれらの量の中身が変わらざるを得ないような理論候補は，はじめ

から議論の対象とする必要はなく,「′」が不要な理論だけをより詳しく検討すればよいということで γ 行列にも $\mathcal{L}(x)$ にも「′」が付いていない.[♯II.7]

☆☆☆ ☆☆☆

II.3 並進対称性とエネルギー運動量テンソル

我々の存在する 4 次元時空はその中に特別な点などは持たない一様な時空と考えられる（時空の一様性：Homogeneity of space-time）．従って，時空座標の原点をずらしても作用積分は不変と要請するのは自然なことである（**並進対称性**：Translational symmetry または**並進不変性**：Translational invariance ）．では，その結果として生まれる保存則はどのようなものだろうか．

まず，ある時空点の変換前・変換後の座標を x^μ，x'^μ とし，両者の関係を

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + g^\mu{}_\nu \epsilon^\nu \tag{II.21}$$

としよう．ここで ϵ^μ が並進（Translation）を表しており，この場合の変換パラメータである．$\mu = 0, 1, 2, 3$ であるから対応する保存則は四つ存在することになる．これは単なる 4 次元的な座標の平行移動であるから，同一点における場は不変のはずである：

$$u'_a(x') = u_a(x) \tag{II.22}$$

従って，一般公式（II.13，II.15）との対応関係は

$$\delta\omega_i \iff \epsilon^\mu, \quad X_i^\mu(x) \iff g^\mu{}_\nu, \quad \Psi_{ai} \iff 0 \tag{II.23}$$

であり，ネータカレント（II.17）は

$$\theta^\mu_\alpha(x) = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))} \partial_\alpha u_a(x) - g^\mu{}_\alpha \mathcal{L}(x) \tag{II.24}$$

♯II.7 この補足を書いた後で改めて手持ちの資料を調べたら，$\mathcal{L}$ の形については文献 [1] の 257 頁に，また γ については文献 [2] の 130 頁に記述が見つかった．どちらもこの補足と基本的に同じ説明であり，正直ホッとしている．

となる．これは4種類（$\alpha=0,1,2,3$）の保存カレント θ_0^μ，θ_1^μ，θ_2^μ，θ_3^μ であるが，α も4元ベクトルの成分を示す添字なので，θ_α^μ を（ローレンツ変換における）2階テンソルと見なすこともできる．そこで，以下では α の自由度についても $\theta^{\mu\alpha}$ のように反変成分で表すことにしよう．

前節の一般論に従いこの4種類のカレントの第0成分（$\mu=0$）を空間積分すれば保存量が得られる：

$$\begin{aligned}\Theta^\alpha &= \int d^3\boldsymbol{x}\,\theta^{0\alpha}(x) = \int d^3\boldsymbol{x}\,\Big[\sum_a \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\dot{u}_a(x))}\partial^\alpha u_a(x) - g^{0\alpha}\mathcal{L}(x)\Big] \\ &= \int d^3\boldsymbol{x}\Big[\sum_a \pi_a(x)\partial^\alpha u_a(x) - g^{0\alpha}\mathcal{L}(x)\Big] \end{aligned} \tag{II.25}$$

上記のように α も4元ベクトルの脚なので，四つの保存量 $\Theta^{0,1,2,3}$ はまとまって一つの4元ベクトルを構成する．このベクトル $(\Theta^0,\Theta^1,\Theta^2,\Theta^3)$ はどのようなベクトルだろうか．その答えは第0成分にある：

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= \int d^3\boldsymbol{x}\,\Big[\sum_a \pi_a(x)\frac{\partial}{\partial x_0}u_a(x) - g^{00}\mathcal{L}(x)\Big] \\ &= \int d^3\boldsymbol{x}\,\Big[\sum_a \pi_a(x)\dot{u}_a(x) - \mathcal{L}(x)\Big]\end{aligned}$$

であり，これは正に系のハミルトニアンの定義に等しい．つまり，Θ^α はその第0成分がエネルギーであるような4元ベクトルであるから4元運動量ベクトルであり，空間積分前の $\theta^{0\alpha}(x)$ はその密度である．従って，$\theta^{0\alpha}(x)$，Θ^α はそれぞれ $\mathcal{P}^\alpha(x)$，P^α と表すのが適切であろう：

$$\mathcal{P}^\alpha(x) = \sum_a \pi_a(x)\partial^\alpha u_a(x) - g^{0\alpha}\mathcal{L}(x) \tag{II.26}$$

$$P^\alpha = \int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{P}^\alpha(x) \tag{II.27}$$

また，出発点となった $\theta^{\mu\alpha}$ は**正準エネルギー運動量テンソル**（Canonical energy-momentum tensor）と呼ばれ，$\mathcal{T}^{\mu\nu}$ と書かれる：

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))}\partial^\nu u_a(x) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}(x) \tag{II.28}$$

なお，この場合 δx^μ は定ベクトル（ϵ^μ）だからヤコビアン（II.16）は明らかに 1 となる．従って，

● 並進変換の場合

作用積分の不変性：$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ ラグランジアン密度の不変性：$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

である．

II.4 ローレンツ対称性と角運動量テンソル

相対論の要請を満たす体系の作用積分は当然ローレンツ変換の下で不変でなければならず（**ローレンツ不変性**：Lorentz invariance），その結果，ここでも幾つかの保存則が生まれる．ディラック方程式の共変性の節で説明したように，任意の微小ローレンツ変換は

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad \delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$$

と表現される．ここで第 1 式の右辺第 2 項は $\delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu = g^\mu{}_\alpha x_\beta \delta\omega^{\alpha\beta}$ と変形できるので，一般公式との対応は $X_i^\mu(x) \Longleftrightarrow g^\mu{}_\alpha x_\beta$ となる（これは 27 頁の脚注で述べた「変換パラメータが複数の添字を持つ場合」に該当する）．但し，このままだと $\delta\omega^{\mu\nu}$ が反対称テンソルであることを明確に示すことができないので，

$$g^\mu{}_\alpha x_\beta \delta\omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^\mu{}_\alpha x_\beta \delta\omega^{\alpha\beta} + g^\mu{}_\beta x_\alpha \delta\omega^{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}(g^\mu{}_\alpha x_\beta - g^\mu{}_\beta x_\alpha)\delta\omega^{\alpha\beta}$$

と変形して

$$X_i^\mu(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(g^\mu{}_\alpha x_\beta - g^\mu{}_\beta x_\alpha) \tag{II.29}$$

と表すことにする．一方，場の変換性については，並進変換の場合は場の種類を問わず $u'_a(x') = u_a(x)$ と簡単だったが，ローレンツ変換の下では，一般には $\delta u_a(x) \neq 0$ となる．しかしながら，場の種類が変われば変換性も異なるので，

ここでは一般公式の記法に従って

$$u'_a(x') = u_a(x) + \Psi_{a\,\mu\nu}(x)\delta\omega^{\mu\nu}$$

と表しておく．但し，$\delta\omega^{\mu\nu}$ の反対称性より $\Psi_{a\,\mu\nu}$ も添字 μ,ν に対しては反対称でなければならない．

これよりネータカレント（II.17）は，先に現れた正準エネルギー運動量テンソルを用いて

$$\theta^{\mu}_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}[\, x_\beta \mathcal{T}^{\mu}_{\ \alpha}(x) - x_\alpha \mathcal{T}^{\mu}_{\ \beta}(x)\,] - \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))}\Psi_{a\,\alpha\beta}(x) \tag{II.30}$$

となり，対応する保存量はこのカレントの第 0 成分

$$\begin{aligned}\theta^{0}_{\alpha\beta}(x) &= \frac{1}{2}[\, x_\beta \mathcal{T}^{0}_{\ \alpha}(x) - x_\alpha \mathcal{T}^{0}_{\ \beta}(x)\,] - \sum_a \pi_a(x)\Psi_{a\,\alpha\beta}(x)\\ &= \frac{1}{2}[\, x_\beta \mathcal{P}_\alpha(x) - x_\alpha \mathcal{P}_\beta(x)\,] - \sum_a \pi_a(x)\Psi_{a\,\alpha\beta}(x)\end{aligned} \tag{II.31}$$

を空間積分して得られる．これ以降は $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ の場合に倣ってここでの添字 α,β も反変成分で表すことにしよう．

上記の $\theta^{0\,\alpha\beta}(x)$ に -2 を掛けた量は**角運動量テンソル**（Angular-momentum tensor）**密度**，その空間積分は**角運動量テンソル**と呼ばれ，それぞれ $\mathcal{M}^{\alpha\beta}(x)$, $M^{\alpha\beta}$ と記される：

$$\mathcal{M}^{\alpha\beta}(x) = x^\alpha \mathcal{P}^\beta(x) - x^\beta \mathcal{P}^\alpha(x) + 2\sum_a \pi_a(x)\Psi_a^{\alpha\beta}(x) \tag{II.32}$$

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{M}^{\alpha\beta}(x) \tag{II.33}$$

（II.32）式右辺において $\mathcal{P}(x)$ を含む項は，その形から 軌道角運動量 に対応すると考えられる．すると，$\Psi_a^{\alpha\beta}$ を含む第 3 項は スピン角運動量 を与えるものと解釈できる．従って，相対論的な場の理論では，軌道角運動量・スピン角運動量は個別には保存量にはなれず，両者の和である全角運動量のみが保存されることになる．

ここでの変換においては δx^μ も時空座標に依存するが，$\delta\omega^{\mu\nu}$ が反対称テンソルであることより $\partial(\delta x^\mu)/\partial x^\mu = \delta\omega^\mu{}_\mu = 0$ となるので，この場合もやはりヤコビアン（II.16）は 1．従って，

- ローレンツ変換の場合

作用積分の不変性：$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ ラグランジアン密度の不変性：$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

である．

II.5 内部対称性：位相変換と電磁カレント

並進やローレンツ変換では，実際に場が存在する時空の座標が変換を受けるが，場の理論ではこれ以外に**内部対称性**（Internal symmetry）が存在することも珍しくない．今では歴史的な例と言えるが，陽子（Proton）と中性子（Neutron）は電荷の有無を別とすれば極めてよく似た性質を持つため，両者を「核子（Nucleon）」という概念で統一的に扱う考え方がある．そこでは，核子は（現実のスピンに似た）アイソスピン（Isospin）という抽象的な量を持ち，それが抽象的なアイソ空間の中で z 軸上向きになっている状態が陽子，下向きになっている状態が中性子と見なす訳である．この場合，核子を表す場はこのアイソスピンの向きを表す添字も持つことになり，もしある理論が陽子と中性子を完全に同等に扱う形になっていれば，すなわち両者を混合する変換

$$u_a(x) \;\to\; u'_a(x) = \sum_b \lambda_{ab} u_b(x)$$

の下で不変であれば，対応するネータカレントが存在することになる：

$$\theta^\mu_i(x) = -\sum_a \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))} \Psi_{ai}(x) \tag{II.34}$$

<u>位相変換</u>

以下ではより一般的な内部変換である**位相変換**（Phase transformation）を調べてみよう．場の量が実でなければ，$u'_a(x) = e^{iq_a\theta} u_a(x)$ という位相の変換を考

えることができる．但し，q_a は場の種類ごとに異なる値をとり得る実定数，θ は全ての場に共通の変換パラメータである．このとき，もし体系がこの変換の下で不変であるならどのような保存則が生まれるだろうか．

この変換はパラメータ θ が微小な場合（それを $\delta\omega$ と記す）

$$u'_a(x) = u_a(x) + iq_a u_a(x)\delta\omega, \quad {u'_a}^* = u^*_a(x) - iq_a u^*_a(x)\delta\omega \tag{II.35}$$

となるので，一般公式との対応は

$$\delta\omega_i \iff \delta\omega, \quad X^\mu_i(x) \iff 0, \quad \Psi_{ai} \iff iq_a u_a(x), \ \ -iq_a u^*_a(x) \tag{II.36}$$

となり，ネータカレントは

$$\theta^\mu(x) = -i\sum_a q_a\Big[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))}u_a(x) - \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u^*_a(x))}u^*_a(x)\Big] \tag{II.37}$$

となる．また，対応する保存量は

$$Q = -i\int d^3\boldsymbol{x}\sum_a q_a[\,\pi_a(x)u_a(x) - \pi_{a*}(x)u^*_a(x)\,] \tag{II.38}$$

である．但し，ここで u^*_a に共役な一般化運動量を π_{a*} と表したが，実際には $\mathcal{L}$ が実関数であることより $\pi_{a*} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{u}^*_a = (\partial\mathcal{L}/\partial\dot{u}_a)^* = \pi^*_a$ である．

実は，このネータカレント θ^μ は**電磁カレント**（Electromagnetic current）を表し，従って，保存量 Q は**電荷**に対応することが後述の具体的な場の扱いにおいて明らかになる．ということは，電荷保存則は我々の世界では厳密に成り立っているので，現実的な理論にとっては上記の位相変換に対する不変性は不可欠ということになる．[♯II.8]

このような内部対称性の場合，当然のことながら時空座標は無関係なのでヤコビアンはいつでも 1 である：

♯II.8 本書では立ち入らないが，現代素粒子物理学の基本理論は**ゲージ理論**（Gauge theory）であり，そこでは**ゲージ変換**という名の変換が極めて重要な役割を果たしている．実は，ここで示した位相変換はそのゲージ変換の簡単な例と言える．

• 内部変換の場合

作用積分の不変性：$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ ラグランジアン密度の不変性：$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x)$

従って，一般論としてはネータの定理が主張するように作用積分の不変性が対称性を生み出すのだが，物理的に重要な対称性は，多くの場合 $\mathcal{L}(x)$ の不変性と直結していることになる．

II.6 C·P·T 変換

ここまでは物理的に重要な連続変換について述べてきたが，**離散変換**（Discrete transformation），つまり変換パラメータが離散的である変換の中にも重要なものがある．離散変換にはネータの定理は適用されず，従って体系がこれらの変換の下で不変であっても保存カレントは生まれない．しかし，これらは素粒子やその相互作用の存在形態・性質に強い制限を与える役割を果たしている．その代表が，**荷電共役**変換（C 変換），**空間反転**（Space inversion）変換（P 変換），**時間反転**（Time reversal）変換（T 変換）である．この C·P·T 変換について概説しておこう．但し，ここでは一般的記述にとどめ，これらの変換の下で場の量（演算子）がどのような振る舞いをするかについては，スカラー場・ディラック場・ベクトル場を具体的に解説するところで詳しく考察することにする．

荷電共役変換

これは粒子と反粒子，例えば電子と陽電子，を入れ換える変換である．従って，反粒子の存在が必然的となる相対論的な場の量子論において明確な意味を持つようになる．電子を“粒子”と呼び陽電子をその“反粒子”と呼ぶのは単なる習慣であり，逆に陽電子の方を“粒子”，電子を“反粒子”と名付けても（理論的には）何ら問題は生じないから，その役割を交換させても物理系の中身は不変

と要請することは不自然なことではないだろう．

空間反転変換

これはその名が示す通り，空間座標の符号を逆転させる変換である：

$$x^\mu = (t, \boldsymbol{x}) \quad \to \quad x'^\mu = \tilde{x}^\mu \equiv (t, -\boldsymbol{x}) \, (= x_\mu)$$

３本の座標軸を全て反転させて得られる座標系は，１本だけ反転させて得られるものと同じであることはすぐわかるだろう．このことから，空間反転された系は“鏡の中の世界”などと呼ばれることもある．また，この変換の下で符号を変えるか変えないかという物理量の性質は**偶奇性**（または**パリティ**：Parity）という名で知られている．

時間反転変換

その名の通り，時間座標の符号を逆転させる変換である：

$$x^\mu = (t, \boldsymbol{x}) \quad \to \quad x'^\mu = -\tilde{x}^\mu = (-t, \boldsymbol{x}) \, (= -x_\mu)$$

この変換の下で不変な現象は古典力学においても見られる（抵抗を考えない振り子など）が，時間座標と空間座標を同等に扱う相対論的な理論となれば，空間座標反転を考える以上は時間座標反転も必然的に考察対象となる．

II.7 場の正準量子化

場の理論という枠組について一通りの解説が終わったので，これを量子化して場の量子論に進もう．系の量子化については，伝統的な**正準量子化**（Canonical quantization）法の他に「経路積分（Path-integral）量子化」や「確率過程（Stochastic）量子化」といった方式もあるが，本書では一貫して正準量子化法を用いる．

まず場の量子化を考えるにあたり，量子力学における離散固有値・連続固有値に対する波動関数の規格直交関係（Orthonormality relation）を思い出そう：

- 離散固有値の場合

$$\int dq\, \psi_i^*(q)\psi_j(q) = \delta_{ij}$$

- 連続固有値の場合

$$\int dq\, \psi_k^*(q)\psi_{k'}(q) = \delta(k-k')$$

つまり，離散量におけるクロネッカーのデルタ（Kronecker δ）は，連続量の場合にはディラックのデルタ関数（δ function）となる．

この対応関係は量子化においても同様で，量子力学の出発点である同時刻（Equal time）での p と q の正準交換関係（Canonical commutation relation）

$$[\,p_i,\ q_j\,] = -i\delta_{ij}, \quad [\,p_i,\ p_j\,] = [\,q_i,\ q_j\,] = 0$$

に対する波動場 ϕ_a の正準量子化の出発点は

$$\begin{aligned} [\,\pi_a(x),\ \phi_b(x')\,] &= -i\delta_{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \\ [\,\pi_a(x),\ \pi_b(x')\,] &= [\,\phi_a(x),\ \phi_b(x')\,] = 0 \end{aligned} \tag{II.39}$$

である．但し，ここで x，x' は4元座標かつ $x^0 = x'^0(=t_0)$ である．また，場の種類に依っては交換関係ではなく反交換関係

$$\begin{aligned} \{\,\pi_a(x),\ \phi_b(x')\,\} &= +i\delta_{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \\ \{\,\pi_a(x),\ \pi_b(x')\,\} &= \{\,\phi_a(x),\ \phi_b(x')\,\} = 0 \end{aligned} \tag{II.40}$$

で量子化されることもある（詳しくは後述のディラック場の量子化を参照）．

これで時刻 t_0 における場の演算子 $\pi_a(x), \phi_a(x)$ が決まり，これに伴い，系を記述するラグランジアン $\mathcal{L}(x)$ 及びハミルトニアン

$$\mathcal{H}(\pi(x),\ \phi(x),\ \partial_i\phi(x)) = \sum_a \pi_a(x)\dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(\phi(x),\ \dot{\phi}(x),\ \partial_i\phi(x))$$

も演算子となる．これが**場の正準量子化**である．

II.8 量子系の時間発展

前節で学んだように，ある時刻 t_0 を選びそこで場の量の間に同時刻（反）交換関係を設定することで，この時刻における演算子 $\mathcal{O}(t_0)$ とそれが作用する対象としての量子状態 $|\Psi_0\rangle$ が決まる訳だが，物理として重要なのは，この系が，このあと時間の経過と共に相互作用の影響でどのように変化していくかである．ある場合には，粒子同士が衝突し別の粒子を生成するだろう．或いは，幾つかの粒子が崩壊するかも知れない．ともかく，どんな変化がどんな確率で起こるかを計算し，それを実験結果と比較することが，系とそこで働く力（相互作用）の性質の研究にとって必要不可欠である．

量子系の時間発展（Time evolution）の代表的な記述法（描像）には**シュレディンガー描像**（Schrödinger picture），**ハイゼンベルク描像**（Heisenberg picture）と**朝永-ディラック描像**（Tomonaga-Dirac picture）（または**相互作用描像**：Interaction picture）の３種類がある．とは言っても，これらの間の差は本質的なものではなく，単に（異なる座標系から同一の現象を見るのと同じく）立場の違いである．量子化の時刻 t_0 における $\mathcal{O}(t_0)$ の期待値 $\langle\Psi(t_0)|\mathcal{O}(t_0)|\Psi(t_0)\rangle$ ($|\Psi(t_0)\rangle \equiv |\Psi_0\rangle$) が，時間の進行に伴って以後どのように変化していくかを考えてみよう．一般には，演算子も状態ベクトルも共に時間変化し，時刻 t においては $\langle\Psi(t)|\mathcal{O}(t)|\Psi(t)\rangle$ となるはずである．ところがシュレディンガー描像においては，この変化は，すべて状態ベクトルの時間発展により起こるという立場を採る．一方，ハイゼンベルク描像では演算子のみが時間発展を担う．これに対して朝永-ディラック描像はその中間的な立場であり，演算子・状態ベクトル共に時間発展する．もちろん，どれを使っても同じ物理的結果が得られるように構成されているが，摂動計算のためには３番目の朝永-ディラック描像が大変便利であることが知られている．

以下，この節ではシュレディンガー描像，ハイゼンベルク描像，朝永-ディラッ

ク描像における演算子および状態ベクトルには，それぞれ S, H, T という添字を付けることにする．但し，どの描像でも同じになる量には何も付けない．特に，基準となる量子化の時刻 t_0 の場の演算子と状態ベクトルは，$\phi_0(\boldsymbol{x})$, $|\Psi_0\rangle$ と表すことにする．

シュレディンガー描像

この描像では，時刻 t_0 での量子化の後，場の演算子は全てそこで決まったもの $\phi_0(\boldsymbol{x})$ が使われ，状態の方が

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = H|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \tag{II.41}$$

に従い変化していく．ここで，ハミルトニアンも演算子であり $\phi_0(\boldsymbol{x})$ で表されている．この描像での場の演算子はしばしば $\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})$ と表されるが，これは $\phi_0(\boldsymbol{x})$ のことである．

上記の微分方程式（II.41）を，$|\Psi(t_0)\rangle_{\mathrm{S}} = |\Psi_0\rangle$ という境界条件で解くのがこの描像で必要な作業であるが，その解は

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \tag{II.42}$$

或いは，時刻 $t_{1,2}$ の状態の関係として

$$|\Psi(t_2)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iH(t_2-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH(t_1-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}|\Psi(t_1)\rangle_{\mathrm{S}}$$

と書ける．但し，(II.42）は相互作用がない場合（$H = H_0$ と表す）には

$$H_0|\Psi_0\rangle = E|\Psi_0\rangle$$

（E は状態 $|\Psi_0\rangle$ の全エネルギー）より

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iE(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

と簡単な形になるが，相互作用が働く場合には，単に形式的なものとなる.[♯II.9] しかし，ともかくこの（II.42）式を用いれば，時刻 t_i において Ψ_i という状態

[♯II.9] ここで“形式的”というのは，確かに（II.42）は方程式（II.41）を満たしはするが，実際には $e^{-iH(t-t_0)}$ というのは無限個の項の和なので，これを使っても，相互作用がある場合には具体的な計算はすぐには出来ないという意味である．

にあった系が，時刻 t_f に Ψ_f という状態になる確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f)$ も，(形式的ながら）コンパクトな式で表せる：

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}}(\Psi_i \to \Psi_f) = {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \Psi(t_i) \rangle_{\mathrm{S}} \tag{II.43}$$

（但し，ここで $|\Psi(t_i)\rangle_{\mathrm{S}} = |\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}}$ ）

なお，通常はシュレディンガー描像での演算子や状態は時刻 $t=0$ の量として導入されるが，ここでは一般性を保つために $t = t_0$ を基準とした．従って，以下ではしばしば他の教科書と $e^{(-)iHt_0}$ といった量だけの差が現れる．これが気になる読者は本書の t_0 を全て 0 と置くか，あるいは，逆に他の教科書の対応する箇所で全ての時間変数 t を $t - t_0$ で置き換えればよい．

ハイゼンベルク描像

この描像では，逆に状態はそのままで演算子の方が時間発展する．但し，すでに述べたように，どちらの描像でも演算子の期待値は同じになるように構成される．従って

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | \mathcal{O}_{\mathrm{H}}(t) | \Psi_0 \rangle &= {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi(t) | \mathcal{O}(t_0) | \Psi(t) \rangle_{\mathrm{S}} \\ &= \langle \Psi_0 | e^{iH(t-t_0)} \mathcal{O}(t_0) e^{-iH(t-t_0)} | \Psi_0 \rangle \end{aligned} \tag{II.44}$$

つまり，

$$\mathcal{O}_{\mathrm{H}}(t) = e^{iH(t-t_0)} \mathcal{O}(t_0) e^{-iH(t-t_0)} \tag{II.45}$$

或いは，ここでも時刻 $t_{1,2}$ の関係として表せば

$$\mathcal{O}_{\mathrm{H}}(t_2) = e^{iH(t_2-t_1)} \mathcal{O}_{\mathrm{H}}(t_1) e^{-iH(t_2-t_1)}$$

である．この描像における場（演算子）は，しばしばハイゼンベルク場（ハイゼンベルク演算子）と呼ばれる．

次に，(II.45) の両辺を時間微分すると

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O}_{\mathrm{H}}(t) = [\, \mathcal{O}_{\mathrm{H}}(t),\ H\,] \tag{II.46}$$

という方程式が得られる．これがハイゼンベルク描像において演算子の時間発展を記述する微分方程式であり，**ハイゼンベルク方程式**（Heisenberg equation）という名称で知られている．

問題 II.3　上記のハイゼンベルク方程式（II.46）を（II.45）式から実際に計算して導け．

問題 II.4　ハミルトニアンは両描像で同じ $H_{\rm H}(t) = H_{\rm S} = H$ であることを示せ．

シュレディンガー描像との関係を用いてこのようにハイゼンベルク方程式を導出すると，その重要性が強くは感じられないかも知れない．しかし，実際には，ハイゼンベルク方程式は，シュレディンガー描像における (II.41) 式と同じ役割を果たす方程式であり，ここから出発するのがハイゼンベルク描像なのである．

以上のように，この描像でも，時間発展は形式的には $\phi_{\rm H}(x) = e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\boldsymbol{x})e^{-iH(t-t_0)}$ と表せた訳だが，これを用いても自由状態以外での実際の計算はやはり不可能に近い．そこで，少なくとも相互作用の寄与が小さい場合に有効な近似になる**摂動**（Perturbation）計算に適した別の描像が，次に導入される．

朝永-ディラック（相互作用）描像

時刻 $t = t_0$ において，ハミルトニアンを，相互作用を含まない部分 H_0 と相互作用項 $H_{\rm I}$ に分ける：

$$H = H_0 + H_{\rm I} \tag{II.47}$$

シュレディンガー描像では，状態のみが

$$|\Psi(t)\rangle_{\rm S} = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

と時間発展し，ハイゼンベルク描像では，逆に演算子のみが

$$\mathcal{O}_{\rm H}(t) = e^{iH(t-t_0)}\mathcal{O}(t_0)e^{-iH(t-t_0)}$$

と時間発展するのであるが，ここで「演算子は時間発展するが，それは H ではなく H_0 で規定される」という第3の，ある意味で上記2描像の中間的な描像を考える．つまり，演算子が

$$\mathcal{O}_{\mathrm{T}}(t) = e^{iH_0(t-t_0)}\mathcal{O}(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{II.48}$$

に従って変化していく描像である．これは**朝永-ディラック描像**あるいは**相互作用描像**と呼ばれる．これからわかるように，この描像では演算子は自由な，つまり $H_{\mathrm{I}} = 0$ の場合のハイゼンベルク演算子と同じ方程式に従う：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O}_{\mathrm{T}}(t) = [\,\mathcal{O}_{\mathrm{T}}(t),\ H_0\,] \tag{II.49}$$

問題 II.5　(II.48) 式の $\mathcal{O}_{\mathrm{T}}(t)$ が，上記のように自由なハイゼンベルク演算子の方程式を満たすことを確認せよ．

状態の時間変化については,「演算子の期待値は描像に依らない」という条件から

$$\begin{aligned}{}_{\mathrm{T}}\langle\Psi(t)|\mathcal{O}_{\mathrm{T}}(t)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{T}} &= {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\mathcal{O}(t_0)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= {}_{\mathrm{T}}\langle\Psi(t)|e^{iH_0(t-t_0)}\mathcal{O}(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

つまり，

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{T}} \tag{II.50}$$

或いは

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{T}} = e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \tag{II.51}$$

が得られる.[♯II.10] 更に，$|\Psi(t_{1,2})\rangle_{\mathrm{T}}$ の関係を直接書くことも出来るが，シュレディンガー描像に比べると少々長くなる：

$$|\Psi(t_2)\rangle_{\mathrm{T}} = e^{iH_0(t_2-t_0)}e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH_0(t_1-t_0)}|\Psi(t_1)\rangle_{\mathrm{T}} \tag{II.52}$$

♯II.10 ここで，一般には H と H_0 は可換ではないので $e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} = e^{i(H_0-H)(t-t_0)} = e^{-iH_{\mathrm{I}}(t-t_0)}$ などとやってはいけない．

また，(II.51) を時間微分すれば

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\rm T} &= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm S} + e^{iH_0(t-t_0)} i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\rm S} \\
&= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm S} + e^{iH_0(t-t_0)} H|\Psi(t)\rangle_{\rm S} \\
&= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\rm I} e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm T} = H_{\rm I}(t)|\Psi(t)\rangle_{\rm T}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$H_{\rm I}(t)$ $(= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\rm I} e^{-iH_0(t-t_0)})$ は，この描像での相互作用ハミルトニアンである．この方程式は，シュレディンガー描像での状態の方程式 $i\partial|\Psi(t)\rangle_{\rm S}/\partial t = H|\Psi(t)\rangle_{\rm S}$ に似ているが，$H_{\rm I}(t)$ 自体が t を含むので，形式的にも $|\Psi(t)\rangle_{\rm T} = e^{-iH_{\rm I}(t)(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$ などとは書けないことに注意しよう．

この方程式

$$
i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\rm T} = H_{\rm I}(t)|\Psi(t)\rangle_{\rm T} \tag{II.53}
$$

は，摂動計算において基本的な役割を果たす．これを，時間変数 t だけを特別扱いすることのない明白に共変的な形に書き直したものは，**朝永-シュヴィンガー方程式**（Tomonaga-Schwinger equation）という名で知られている．

最後に，この描像での相互作用ハミルトニアン $H_{\rm I}(t)$ について，次の点を指摘しておこう：ハミルトニアン密度は，(II.8) 式からもわかるように場の演算子とその空間微分の関数（多項式）だから

$$
\begin{aligned}
H_{\rm I}(t) &= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\rm I} e^{-iH_0(t-t_0)} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\, e^{iH_0(t-t_0)} \mathcal{H}_{\rm I}(\pi(\boldsymbol{x},t_0), \phi(\boldsymbol{x},t_0), \partial_i\phi(\boldsymbol{x},t_0)) e^{-iH_0(t-t_0)} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{H}_{\rm I}(\pi_{\rm T}(\boldsymbol{x},t), \phi_{\rm T}(\boldsymbol{x},t), \partial_i\phi_{\rm T}(\boldsymbol{x},t))
\end{aligned} \tag{II.54}
$$

である．つまり，$H_{\rm I}(t)$ は自由場のハイゼンベルク演算子だけで表される．これは，この描像の大きな利点と言える．何故なら，次章（III.6）で見るように，自由なハイゼンベルク場は，明確な時間依存性も含め簡単で扱い易い構造を持つからである．

II.9 場の演算子の変換性

この章の締めくくりとして，一般の変換に対しての量子場の満たすべき性質を考えておこう．古典場の変換性はある意味で直観的に議論できるが，量子場つまり演算子となると少々注意が必要になる．例えば，時空点が $x \to x' = \Lambda x$ という変換を受けるとき，古典場 $\phi_{\rm cl}(x)$ はその変換群に対する表現に応じて

$$\phi'_{\rm cl}(x') = D(\Lambda)\phi_{\rm cl}(x) \tag{II.55}$$

のように変換される．これに対し，量子場（場の演算子）の振る舞いは，対応する古典場の変換性に加えて状態ベクトルの変換性も含めて調べないと決められない．

まず，体系の状態を記述する状態ベクトルと場の演算子との相互関係から考えてみよう．状態・演算子の時間発展に関しては，前節で見たようにその役割をどちらか一方のみに課すことができた： 前者だけにその役割を担わせる立場（シュレディンガー描像）と後者のみに課す立場（ハイゼンベルク描像）である．ここで，時間発展だけでなく，全ての物理的な変換に対しても同様の描像を導入する．すなわち，状態のみが $|\Phi\rangle \to |\Phi'\rangle$ と変換を受ける**一般化されたシュレディンガー描像**（Generalized Schrödinger picture）および演算子のみが $\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(x)$ と変換を受ける**一般化されたハイゼンベルク描像**（Generalized Heisenberg picture）である．但し，これも時間発展の場合と同じく単に見方の違いなので，演算子の期待値はどちらの描像でも同じでなければならない：

$$\langle\Phi'|\mathcal{O}(x)|\Phi'\rangle = \langle\Phi|\mathcal{O}'(x)|\Phi\rangle$$

従って，一般化されたシュレディンガー描像における状態の変換を

$$|\Phi\rangle \quad\to\quad |\Phi'\rangle = U(\Lambda)|\Phi\rangle \tag{II.56}$$

と表せば，一般化されたハイゼンベルク描像における演算子の変換性は

$$\mathcal{O}(x) \quad\to\quad \mathcal{O}'(x) = U(\Lambda)^{-1}\mathcal{O}(x)U(\Lambda) \tag{II.57}$$

ということになる.[♯II.11] 両描像はもちろん同等であるが，本書では（時間発展以外は）一般化されたシュレディンガー描像に立って話を進める.

これで変換の下での演算子の振る舞いを調べる準備は整った. 多くの読者は既に量子力学におけるエーレンフェストの定理（Ehrenfest's theorem）で経験済みと思うが，古典場とそれに対応する量子場の関係は

$$\phi_{\mathrm{cl}}(x) = \langle \Phi|\phi(x)|\Phi\rangle, \qquad \phi^*_{\mathrm{cl}}(x) = \langle \Phi|\phi(x)|\Phi\rangle^* = \langle \Phi|\phi^\dagger(x)|\Phi\rangle \tag{II.58}$$

であり，従って（II.55）を量子場・状態ベクトルで表せば

$$\begin{aligned} &\langle \Phi'|\phi(x')|\Phi'\rangle = D(\Lambda)\langle \Phi|\phi(x)|\Phi\rangle \\ &\qquad \Longrightarrow \qquad \langle \Phi|U(\Lambda)^{-1}\phi(x')U(\Lambda)|\Phi\rangle = D(\Lambda)\langle \Phi|\phi(x)|\Phi\rangle \end{aligned} \tag{II.59}$$

となる. ここで，$U(\Lambda)$ は量子状態・量子場に作用する変換の演算子だが，$D(\Lambda)$ は例えば各成分が具体的に数値で表された行列のような量であって，古典場にも量子場にも作用する. 従って，上式が任意の状態について成り立つためには

$$U(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda)^{-1} = D(\Lambda)^{-1}\phi(x') \tag{II.60}$$

でなければならない. これが次章以降でローレンツ変換および C·P·T 変換に対する量子場の振る舞いを調べる際に基礎となる関係式である.

なお，上述のように，我々は一般化されたシュレディンガー描像を採るので，変換を受ける主体は（演算子ではなく）「状態」である. また，(II.60）の左辺は一般化されたハイゼンベルク描像での量子場の変換（II.57）とは逆の形になっている. 従って，その意味では（II.60）は「変換 $U(\Lambda)$ の下での量子場の変換性」ではなく「一般化されたシュレディンガー描像における量子場と変換演算子 $U(\Lambda)$ の関係」とでも言うべきだが，以後簡単のため, (II.60）も「量子場（場の演算子）の変換性あるいは振る舞い」などと呼ぶことにする.

[♯II.11] このあたりの詳しい解説が文献 [3] に与えられている.

III. スカラー場の理論

素粒子とその相互作用の記述に登場する場は幾種類かあるが，その中で最も簡単な場がスカラー場である．従って，場の理論の基本的な構成を入門的に解説する際には，例として好適と言えよう．また，素粒子物理学の標準理論においては，物質に質量を与えるという極めて重要な役割を担うのはヒッグス粒子と呼ばれるスカラー粒子（場）である．

III.1 スカラー場の古典論

クライン-ゴルドン方程式

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{III.1}$$

に従う 1 成分のみの波動場 $\phi(x)$ を考えよう.♯III.1 この ϕ が，ローレンツ変換 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ の下で $\phi(x) \to \phi'(x')$ と変換されるとすれば，変換後の世界における方程式は $\Box' = \partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \Box$ であることより

$$(\Box + m^2)\phi'(x') = 0$$

となる．つまり，相対論的に不変な世界においては，$\phi'(x')$ は $\phi(x)$ と全く同じ方程式を満たすことが要求される訳で，これに従って ϕ のローレンツ変換性を

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

と決めることができる．このような変換性（この場合は不変性）を持つ場は**スカラー場**と呼ばれる．

♯III.1 1 成分というのであるから，この場はディラック方程式は満たさない．

はじめに $\phi(x)$ が実数である場合（**実スカラー場**）を考えよう．この場合の対応するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \tag{Ⅲ.2}$$

である．これから，一般化運動量 $\pi(x)$ が

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) \tag{Ⅲ.3}$$

と導かれ，これを用いてハミルトニアン密度も

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\,\pi^2(x) + \sum_{i=1}^{3}\partial^i\phi(x)\partial^i\phi(x) + m^2\phi^2(x)\,\Big]\end{aligned} \tag{Ⅲ.4}$$

と決定される．

なお，運動方程式を導くという条件だけであれば，上の $\mathcal{L}$ に任意定数 c を掛けたものも同じ役割は果たせる．しかし，$\mathcal{L}$ が実であること及びエネルギー（密度）としての $\mathcal{H}$ の符号も考慮すれば $c > 0$ でなければならず，その場合は $\sqrt{c}\phi$ を改めて ϕ と定義し直すことで $\mathcal{L}$ は（Ⅲ.2）の形に戻る．従って，始めから $c = 1$ と置いても一般性は失われない．

問題 Ⅲ.1　ラグランジュ方程式（Ⅱ.5）を用いて，実際に上記の $\mathcal{L}$ から運動方程式としてクライン-ゴルドン方程式（Ⅲ.1）が導かれることを示せ．

$\phi(x)$ が複素数（**複素スカラー場**: Complex scalar field）である場合は，独立な場は ϕ と ϕ^* の 2 種類となり，それぞれがクライン-ゴルドン方程式を満たすので $\mathcal{L}$ の形は

$$\mathcal{L}(x) = c\Big[\,\partial_\mu\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^*(x)\phi(x)\,\Big]$$

でなければならない．ここで，c の値は実スカラー場の $\mathcal{L}$ と同じ基準で決められるべきだから，規格化も考えて ϕ と ϕ^* を二つの実スカラー場すなわち実部

と虚部に分けよう：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\,\phi_1(x)+i\phi_2(x)\,],\quad \phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\,\phi_1(x)-i\phi_2(x)\,]$$

これを上の $\mathcal{L}$ に代入すると

$$\mathcal{L}(x)=\frac{1}{2}\,c\sum_{i=1}^{2}\Big[\,\partial_\mu\phi_i(x)\partial^\mu\phi_i(x)-m^2\phi_i^2(x)\,\Big]$$

これは二つの実スカラー場 $\phi_{1,2}$ のラグランジアン密度のはずだから（Ⅲ.2）と同じ規格を採る限りは $c=1$ でなければならない．従って，複素スカラー場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x)=\partial_\mu\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x)-m^2\phi^*(x)\phi(x) \tag{Ⅲ.5}$$

である．これにより ϕ と ϕ^* に共役な一般化運動量 π，π_* は

$$\begin{aligned}\pi(x)&=\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(x)=\dot{\phi}^*(x)\,,\\ \pi_*(x)&=\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}^*(x)}\mathcal{L}(x)=\dot{\phi}(x)(=\pi^*(x))\end{aligned} \tag{Ⅲ.6}$$

と決まり，ハミルトニアン密度も次のように求まる：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x)&=\pi(x)\dot{\phi}(x)+\pi_*(x)\dot{\phi}^*(x)-\mathcal{L}(x)\\ &=\pi_*(x)\pi(x)+\sum_{i=1}^{3}\partial^i\phi^*(x)\partial^i\phi(x)+m^2\phi^*(x)\phi(x)\end{aligned} \tag{Ⅲ.7}$$

以下，複素スカラー場は実スカラー場とほぼ同じように扱えるので，主要な計算は実スカラー場に対して行い，複素スカラー場については重要な結果を簡潔に示すこととする．

実スカラー場の平面波展開

方程式（Ⅲ.1）の平面波解 $\phi(x)=Ae^{-ipx}$ を求めよう．これを方程式の中の $\phi(x)$ に代入すると $-p^2+m^2=-(p^0)^2+\boldsymbol{p}^2+m^2=0$ という関係が得られる．従って，$p^0=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ が解であることの条件である．一般解は二つの独立

な解 $e^{-i(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}x^0-\boldsymbol{px})}$, $e^{+i(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}x^0+\boldsymbol{px})}$ に任意係数 $a_{1,2}(\boldsymbol{p})$ を掛け全ての運動量に亙って重ね合わせれば得られる：♯Ⅲ.2

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a_1(\boldsymbol{k})e^{-i(k^0x^0-\boldsymbol{kx})} + a_2(\boldsymbol{k})e^{+i(k^0x^0+\boldsymbol{kx})}\,]$$

但し，ここでは $k^0 \equiv +\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$ であり，また $d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \equiv d^3\boldsymbol{k}/[(2\pi)^3(2k^0)]$ という積分要素を用いるのは共変的規格化（Covariant normalization：付録2参照）を採用していることに依っている．

ここで，右辺第2項において積分変数を $\boldsymbol{k}$ から $-\boldsymbol{k}$ に替えると

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a_1(\boldsymbol{k})e^{-i(k^0x^0-\boldsymbol{kx})} + a_2(-\boldsymbol{k})e^{+i(k^0x^0-\boldsymbol{kx})}\,]\\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a_1(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a_2(-\boldsymbol{k})e^{+ikx}\,]\end{aligned}$$

となるが，ϕ が実であるためには 第2項 = [第1項]* でなければならないので，改めて $a(\boldsymbol{p}) = a_1(\boldsymbol{p})$，$a^*(\boldsymbol{p}) = a_2(-\boldsymbol{p})$ と書き直し

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \tag{Ⅲ.8}$$

を得る．ここで，4元運動量 k^μ が

$$k^2\,(\equiv k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2\,) = m^2 \tag{Ⅲ.9}$$

を満たすことも解の条件であることを憶えておこう．これより，一般化運動量も

$$\pi(x) = -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \tag{Ⅲ.10}$$

と表される．なお，ここでは $\phi(x) = Ae^{-ipx}$ という形から出発したが，$\phi(x) = Ae^{ipx}$ を用いても同じ結果に達することは容易に確かめられる．

複素スカラー場の平面波展開

複素スカラー場 $\phi(x)$ も実スカラー場と同じクライン-ゴルドン方程式

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

♯Ⅲ.2 本書では，原則として確定した運動量は p，積分変数としての運動量は $k, q, \cdots$ で表す．

を満たす．実スカラー場との差は $\phi = \phi^*$ という条件が課されないということのみであり，従って，その平面波展開は

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + b^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,],$$
$$\phi^*(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,b(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \qquad (\text{Ⅲ}.11)$$

と書ける．勿論，ここでも 4 元運動量 k^μ は

$$k^2 = m^2$$

を満たすことが要求される．これより，一般化運動量も

$$\pi(x) = -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0[\,b(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,],$$
$$\pi_*(x) = -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - b^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \qquad (\text{Ⅲ}.12)$$

と与えられる．

Ⅲ.2 実スカラー場の量子化と演算子

実スカラー場の量子化条件は（Ⅱ.39）の交換関係と全く同じ形（但し，自由度＝1 なので添字 a，b と δ_{ab} は不要）

$$[\,\pi(x),\ \phi(x')\,] = -i\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'),$$

$$[\,\pi(x),\ \pi(x')\,] = [\,\phi(x),\ \phi(x')\,] = 0 \qquad (\text{Ⅲ}.13)$$

（$x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$，$x'^\mu = (t, \boldsymbol{x}')$）である．これに伴い $a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})$ も

$$[\,a(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}')\,] = (2\pi)^3 2p^0\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'),$$

$$[\,a(\boldsymbol{p}),\ a(\boldsymbol{p}')\,] = [\,a^\dagger(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}')\,] = 0 \qquad (\text{Ⅲ}.14)$$

という交換関係を満たす演算子 $a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p})$ で置き換えられる．[♯Ⅲ.3]

♯Ⅲ.3 前章の（Ⅱ.58）式で示したように a^* には $a^\dagger$ が対応する．

問題 III.2　$a(\boldsymbol{p})$, $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ がこの交換関係を満たせば，実際に $\phi(x)$, $\pi(x)$ の従う正準量子化の条件（III.13）が導かれることを示せ．

また，ハミルトニアンも $a(\boldsymbol{p})$, $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ で表すことが出来る：

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\Big[\,\dot{\phi}^2(x) + \sum_{i=1}^{3}\partial^i\phi(x)\partial^i\phi(x) + m^2\phi^2(x)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\,\Big[\sum_{\mu=0}^{3}\partial^\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + m^2\phi^2(x)\,\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,k^\mu q^\mu\int d^3\boldsymbol{x}\Big[-a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})e^{-i(k+q)x} + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{-i(k-q)x} \\
&\qquad\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})e^{i(k-q)x} - a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{i(k+q)x}\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}m^2\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\int d^3\boldsymbol{x}\Big[a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})e^{-i(k+q)x} + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{-i(k-q)x} \\
&\qquad\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})e^{i(k-q)x} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{i(k+q)x}\Big] \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^3\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,(k^0q^0 + \boldsymbol{k}\boldsymbol{q}) \\
&\qquad \times\Big[-a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})e^{-i(k^0+q^0)x^0} + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})e^{-i(k^0-q^0)x^0} \\
&\qquad\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})e^{i(k^0-q^0)x^0} - a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})e^{i(k^0+q^0)x^0}\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}(2\pi)^3\,m^2\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}} \\
&\qquad \times\Big[a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})e^{-i(k^0+q^0)x^0} + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})e^{-i(k^0-q^0)x^0} \\
&\qquad\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})e^{i(k^0-q^0)x^0} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})e^{i(k^0+q^0)x^0}\Big]
\end{aligned}
$$

（式(III.9)より $k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$, $q^0 = \sqrt{\boldsymbol{q}^2 + m^2}$ なので）

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\frac{1}{2k^0}\Big[-m^2\,a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-2ik^0x^0} + (2(k^0)^2 - m^2)a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\
&\qquad\qquad + (2(k^0)^2 - m^2)a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - m^2\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2ik^0x^0}\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\frac{1}{2k^0}m^2\Big[a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-2ik^0x^0} + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\
&\qquad\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2ik^0x^0}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\,\Big[a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\Big] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + C_0
\end{aligned}
\tag{III.15}
$$

ここで，最後の項

$$C_0 \equiv \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\, k^0 \delta^3(0)$$

は，単なる定数であってエネルギー軸原点の調節で 0 にできるので，以後除いて考えることにする．この結果，この系のハミルトニアンは次のようになる：

$$H = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{III.16}$$

(III.15) 式の計算には，この系の重要な性質が顔を出している： もし，演算子同士が交換関係ではなく反交換関係に従うならば，上記の H は，(III.15) の最後から 2 番目の段階（$aa^\dagger + a^\dagger a$ の部分）で全体が C_0 と同じ定数になってしまい，物理的に意味のない量となる．従って，$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$ を基礎方程式とする系は，交換関係により量子化されなければならない．

生成消滅演算子

演算子となった $a(\boldsymbol{p})$，$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ の性質を調べるために

$$N \equiv \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{III.17}$$

という演算子を導入する．これは明らかにエルミートであるからその固有値は常に実数だが，更に N の場合，どの固有値も常に正または 0 であると言える．事実，N の任意の固有値を c として，対応する固有状態（Eigenstate）を $|\psi_c\rangle\ (\neq 0)$，そこに a が 1 個作用した状態 $a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle$ を $|a(\boldsymbol{p})\psi_c\rangle$ と表せば

$$\begin{aligned}
&\langle\psi_c|N|\psi_c\rangle\ (= c\langle\psi_c|\psi_c\rangle)\\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\langle\psi_c|a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})|\psi_c\rangle = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\langle a(\boldsymbol{k})\psi_c|a(\boldsymbol{k})\psi_c\rangle\ \geq\ 0
\end{aligned}$$

及び

$$\langle\psi_c|\psi_c\rangle\ >\ 0$$

より必ず $c \geq 0$ である．

問題 III.3　N はエルミート演算子であることを示せ．

上で導入した $|\psi_c\rangle$ に $a(\boldsymbol{p})$ を 1 個作用させたらどうなるだろう？ $a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle \neq 0$ と仮定すれば

$$\begin{aligned} Na(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle \\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, [\, a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) - (2\pi)^3 2k^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\,]\, a(\boldsymbol{k})|\psi_c\rangle \\ &= a(\boldsymbol{p})N|\psi_c\rangle - a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle = (c-1)a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle \end{aligned} \tag{III.18}$$

つまり，$a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle$ は $c-1$ という固有値を持つ状態ということになるが，もし $(0 \leq)\, c < 1$ であったなら $c-1<0$ となり，N の固有値は負にはならないという性質と矛盾してしまう．従って，$c<1$ という場合には $a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle \neq 0$ という仮定は許されない，つまり $a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle = 0$ でなければならない．これは任意の $\boldsymbol{p}$ に対して言えることだから

$$\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})|\psi_c\rangle \ (= N|\psi_c\rangle = c|\psi_c\rangle) = 0$$

ここで $|\psi_c\rangle \neq 0$ であったから $c=0$．すなわち，1 より小さい固有値として許されるのは 0 だけである．

次に，$c \geq 1$ の場合を考えよう．上述の通り，そのときは $a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle$ は，（$a(\boldsymbol{p})|\psi_c\rangle \neq 0$ である限り）固有値が $c-1$ の状態として存在可能である．そこで同様に $a(\boldsymbol{p})$ を（種々の $\boldsymbol{p}$ について）次々と作用させていくと，固有値が $c-n$（<1, 但し n は正の整数）である状態に行き着く．すると，この状態には上の $c<1$ の場合の議論が適用され，$c-n=0$ でなければならなくなる．つまり，$c=n$ である．これより，N の固有値は正の整数または 0 しかないと結論できる．

ここで，N の固有値が 0 である状態 $|\psi_0\rangle$ を改めて $|0\rangle$ と表すことにしよう．但し，$|0\rangle$ は $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化されているものとする．すると，上記のように任意の $\boldsymbol{p}$ に対して

$$a(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0 \tag{III.19}$$

である．従って

$$H|0\rangle \left(= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})|0\rangle\right) = 0 \tag{III.20}$$

つまり，$|0\rangle$ はエネルギーが 0 の状態を表していることになるので，**真空状態**（Vacuum state）と解釈できる．

では，この真空状態に $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ を 1 個作用させるとどんな状態が生まれるだろうか？それを調べるために $a^\dagger|0\rangle$ に H を作用させよう．すると，$Na|\psi_c\rangle$ の場合と同じように a と $a^\dagger$ の交換関係を用いて計算を進めることにより

$$\begin{aligned} Ha^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle &= a^\dagger(\boldsymbol{p})\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\,[\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + (2\pi)^3 2k^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\,]|0\rangle \\ &= p^0 a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \end{aligned} \tag{III.21}$$

となるから，$a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ はエネルギー p^0 の状態とわかる．更に，同様の計算で

$$Na^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$$

となるので，N の固有値は 1．従って，$a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ はエネルギー p^0 の粒子が 1 個存在する状態で，$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ はその粒子を 1 個つくる演算子，N はこの粒子の**個数演算子**（Number operator），$n(\boldsymbol{p}) \equiv a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ は**個数密度演算子**と解釈できる．また，同様の考察から $a(\boldsymbol{p})$ はこの粒子を 1 個消す作用を持つ演算子であることも示せる．しかも $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ だから，この粒子の運動量は $\boldsymbol{p}$，質量は m であると推測されるが，これは III.7 においてエネルギー運動量演算子を用いて実際に確かめられる．

このように，古典波動場を量子化することにより，極めて自然な形で粒子像が得られるのである．演算子 $a^\dagger$ と a は，以上の機能からそれぞれ**生成演算子**（Creation operator），**消滅演算子**（Annihilation operator）と，また両者合わせて**生成消滅演算子**と呼ばれ，この演算子が生成消滅させる粒子は，スカラー場の量子化で生まれたということで**スカラー粒子**と名付けられている．

問題 III.4　$Na^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ であることを示せ．

問題 III.5　状態 $a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle$ の N, H に対する固有値を求めよ．

問題 III.6　$\langle 0|\phi(x)|\boldsymbol{p}\rangle = e^{-ipx}$ であることを確かめよ．但し，$|\boldsymbol{p}\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$，$p^\mu = (p^0, \boldsymbol{p})$ である．

ここで，系が交換関係により量子化されたことの意味について，簡単に触れておこう．このように量子化された n 個の同種粒子系

$$a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle$$

においては $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \cdots = \boldsymbol{p}_n$ と置いても何の問題も生じない．つまり，この粒子はいくつでも同時に同じ状態に入ることが出来る．これは，この粒子が**ボーズ統計**（Bose statistics）に従う粒子であることを意味する（**ボソン**或いは**ボーズ粒子**：Boson）．これが，もし反交換関係で量子化されていたなら，すでに $n = 2$ の段階で

$$\begin{aligned} a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle &= -a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)|0\rangle \\ \Longrightarrow \quad a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{III.22}$$

つまり，「一つの状態には 1 個の粒子しか入ることは許されない」という**パウリの排他律**（Pauli exclusion principle）が現れる．この場合には，粒子は**フェルミ統計**（Fermi statistics）に従うことになる（**フェルミオン**或いは**フェルミ粒子**：Fermion）．

III.3 正規積

ここで，(III.15) 式から (III.16) 式への変形について再度考えてみよう．H に C_0 が残っていると $H|0\rangle = C_0|0\rangle$ となるので，この定数は "真空のエネルギー" と解釈できる．従って，それが 0 となるようエネルギー軸の原点を定めるのは自然なことである．しかし，そうは言っても C_0 は無限大の量であるし，また仮に有限であったとしても，それを "手で" 取り除くことの正当性に対して疑問を感じる人もいるかも知れない．そこで，**正規積**（Normal product）という概念が導入される．上記の式変形が，すべて古典論の段階で行われたとしたら

$a^*a = aa^*$ だから，そのような定数は現れない．そこで,「量子論に最適な形になるように，予め全ての式変形を済ませた後で，実際に量子論に移行する」と考えれば，この問題は回避される．もう少し具体的な表現をするなら,「場の積で与えられる量については，量子化した時にどの項においても生成演算子が全て消滅演算子の左側に来るように，古典論の段階で整理しておく」という要請を量子化の規則に付け加えるということである．この規則に従って作られた積を正規積と呼び，$:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):$ のように全体を二つの「:」で挟んで表す．[♯Ⅲ.4] 例えば $:aa^\dagger: = a^\dagger a$, $:a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger: = a_1^\dagger a_3^\dagger a_2$ である．但し，生成演算子，消滅演算子同士の順序はそのままにしておく．また，フェルミ統計に従う場の場合には，$:aa^\dagger: = -a^\dagger a$ のように 1 回順序交換する毎にマイナス符号を付けるものとする．

この定義に従うと，二つの場の正規積は

$$
\begin{aligned}
:\phi(x)\phi(y): &= :\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,][\,a(\boldsymbol{q})e^{-iqy} + a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{iqy}\,]: \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,[\,:a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q}):e^{-i(kx+qy)} + :a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q}):e^{-i(kx-qy)} \\
&\qquad + :a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q}):e^{i(kx-qy)} + :a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q}):e^{i(kx+qy)}\,] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,[\,a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})e^{-i(kx+qy)} + a^\dagger(\boldsymbol{q})a(\boldsymbol{k})e^{-i(kx-qy)} \\
&\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})e^{i(kx-qy)} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{i(kx+qy)}\,]
\end{aligned}
\tag{Ⅲ.23}
$$

となる．また，正規積で表された量の真空期待値（Vacuum expectation value）は常に 0 になる：

$$
\langle 0|:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):|0\rangle = 0 \tag{Ⅲ.24}
$$

何故なら，その定義から必ず消滅演算子が $|0\rangle$ に，或いは生成演算子が $\langle 0|$ に直接掛かるからである．

量子力学における量子化の規則に慣れている読者は，こんな規則を自由に追加していいのか？と疑問に思うかも知れない．結論を先に言えば「(論理的整合性が保たれる限り）追加してもよい」のである．量子化の出発点である正準交

[♯Ⅲ.4]「:」を使う替りに $N[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]$ と書く流儀もある．

換関係 $[p,\ q]=-i$ も，もともとは我々が都合のいい結果が出るように“勝手に”導入した仮定である．ところが，この関係だけでは完全に満足のいく結果は出ないと判明したので，ここで新たな規則を追加する訳である．

III.4 複素スカラー場の量子化と演算子

複素スカラー場の量子化条件も基本構成は実スカラー場と同じである．すなわち，一般化座標とそれに共役な一般化運動量の間に 0 でない同時刻交換関係が設定される．但し，実スカラー場に比べ自由度は 2 倍になっているので，具体的な量子化条件は π，ϕ，π^*，ϕ^* の間に課される

$$[\,\pi(x),\ \phi(x')\,]=[\,\pi^\dagger(x),\ \phi^\dagger(x')\,]=-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{III.25}$$

及び

$$\begin{aligned}&[\,\pi(x),\ \pi(x')\,]=[\,\phi(x),\ \phi(x')\,]=[\,\pi^\dagger(x),\ \pi^\dagger(x')\,]\\&=[\,\phi^\dagger(x),\ \phi^\dagger(x')\,]=[\,\pi(x),\ \phi^\dagger(x')\,]=[\,\pi^\dagger(x),\ \phi(x')\,]=0\end{aligned} \tag{III.26}$$

（$x^\mu=(t,\boldsymbol{x})$，$x'^\mu=(t,\boldsymbol{x}')$）である．これに伴い展開係数 $a(\boldsymbol{p}), b(\boldsymbol{p})$ も

$$[\,a(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}')\,]=[\,b(\boldsymbol{p}),\ b^\dagger(\boldsymbol{p}')\,]=(2\pi)^3 2p^0\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,,$$

$$[\,a(\boldsymbol{p}),\ a(\boldsymbol{p}')\,]=[\,b(\boldsymbol{p}),\ b(\boldsymbol{p}')\,]=[\,a(\boldsymbol{p}),\ b(\boldsymbol{p}')\,]=[\,a(\boldsymbol{p}),\ b^\dagger(\boldsymbol{p}')\,]=0 \tag{III.27}$$

（これ以外の組み合わせもこれによって 0 となる）という交換関係を満たす演算子に移行する．

次に，これらの a，$a^\dagger$，b，$b^\dagger$ は粒子 a，b の生成消滅演算子であることが実スカラー場と同様に示せ，さらに後で議論する電荷演算子により，a，b は互いに粒子・反粒子の関係になっていることもわかる．ここで，個数演算子は

$$N_a\equiv\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\,,\quad N_b\equiv\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\,,$$

$$N=N_a+N_b \tag{III.28}$$

であり，ハミルトニアンを生成消滅演算子で表すと

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3\boldsymbol{x} \ :[\,\pi(x)\dot{\phi}(x) + \pi^\dagger(x)\dot{\phi}^\dagger(x) - \mathcal{L}(x)\,]: \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0[\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\,]
\end{aligned}
\tag{Ⅲ.29}
$$

となる．

問題 Ⅲ.7　実スカラー場における計算に倣い
(a) N_a，N_b がそれぞれ粒子 a，b の個数演算子になっていること
(b) ハミルトニアンを演算子 a，b で表せば（Ⅲ.29）になること
を示せ．

Ⅲ.5 場の量子論のフォック空間

場の量子論の重要な構成要素である生成消滅演算子が導入されたこの段階で，系の量子化からスタートし，量子場・量子状態ベクトルの活動舞台である“フォック空間”を構成する手順を説明しておこう．

(1) 対象となる系のラグランジアンを見出す．この際，体系が持つ対称性が重要な条件となる．そのラグランジアンより一般化座標，一般化運動量および場 ϕ が従う運動方程式を求め，完全系を構成するその運動方程式の解で ϕ を展開する．運動量の確定状態（平面波）による展開がよく知られた例だが，角運動量の確定状態（球面波：Spherical wave）による展開などを考えることもある．以下では平面波展開を用いて話を進める．

(2) 一般化座標と一般化運動量の間に同時刻（反）交換関係を設定し，それらを演算子と読み替える（場の量子化）．これでこの時刻における場の演算子が決まる．その際，$\mathcal{L}(x)$ の中の場の積は，すべて正規積として扱う．同時に，その量子化条件より ϕ の展開係数 $a, a^\dagger$ の間の（反）交換関係を

求める．これにより，$a, a^\dagger$ は，それぞれ対応する解が表す状態の粒子あるいは反粒子を 1 個消す演算子（消滅演算子）および 1 個生み出す演算子（生成演算子）と解釈できるようになる．

(3) 消滅演算子 a を用いて $a|0\rangle = 0$ という条件で真空状態を定義する．次に，その $|0\rangle$ に生成演算子を作用させて，粒子数・運動量が確定した状態を構成していく：$|\boldsymbol{p}\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$，$|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle, \cdots$．このように作られた状態ベクトルの全体 $\{\,|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\rangle\,\}$ は，個数演算子 N の固有ベクトル系として完全系を構成する．より詳しく言えば，$\{\,|\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle\,\}$ は，基底として一つのヒルベルト空間（Hilbert space）を張ることになる．量子力学・場の量子論で重要な役割を果たすこの空間と基底は，それぞれ**フォック空間**（Fock space），**フォック基底**（Fock basis）と呼ばれている．

必要な手続きは以上だが，上記 (3) には重要な事実が含まれている．すなわち，$\{\,|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\rangle\,\}$ が完全系を構成するということは，任意の物理的状態 $|\Psi\rangle$ が

$$|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_i\, |\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle\langle\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n|\Psi\rangle \tag{III.30}$$

と展開できるということである．この展開式は，多体系の量子力学と場の量子論の同等性も示している．つまり，右辺の展開係数 $\langle\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n|\Psi\rangle$ は，n 粒子系の（運動量表示）波動関数に他ならず，従って，$|\Psi\rangle$ による状態の場の量子論的記述は，1 粒子波動関数，2 粒子波動関数，$\cdots$ の総体による量子力学的な記述と同等という訳である．

III.6 場の演算子の時間発展

場の演算子の時間発展を生成消滅演算子によって表現するために，ハイゼンベルク描像に移行しよう．このとき ϕ は

$$\phi_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}, t) = e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\boldsymbol{x})e^{-iH(t-t_0)}$$

$$= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[e^{iH(t-t_0)} a(\boldsymbol{k}) e^{-iH(t-t_0)} e^{-ikx} + e^{iH(t-t_0)} a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-iH(t-t_0)} e^{ikx} \right]_{x^0=t_0}$$

となるので，この描像では生成消滅演算子も

$$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}) \ \rightarrow \ a_{\rm H}^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}, t) = e^{iH(t-t_0)} a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}) e^{-iH(t-t_0)} \tag{Ⅲ.31}$$

と時間発展していくことがわかる（上式で $a^{(\dagger)}$ は a または $a^\dagger$ を意味している）．つまり，この描像では，各時刻毎に生成消滅演算子が存在し，♯Ⅲ.5 ある時刻でのフォック基底は，その時刻の生成演算子から構成されることになる．各時刻毎に状態ベクトルの完全系が導入されるのである．

特に，相互作用がない場合には $[H_0,\ a(\boldsymbol{p})] = -p^0 a(\boldsymbol{p})$ となることに注意しよう．すると，任意の演算子または行列 A, B に対して成り立つ

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots \tag{Ⅲ.32}$$

という関係より

$$\begin{aligned} a_{\rm H}(\boldsymbol{p}, t) &= e^{iH_0(t-t_0)} a(\boldsymbol{p}) e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= a(\boldsymbol{p}) + i(t-t_0)[H_0,\ a(\boldsymbol{p})] + \frac{1}{2} i^2 (t-t_0)^2 [H_0,\ [H_0,\ a(\boldsymbol{p})]] + \cdots \\ &= a(\boldsymbol{p})[1 + (-ip^0)(t-t_0) + \frac{1}{2}(-ip^0)^2 (t-t_0)^2 + \cdots] \\ &= a(\boldsymbol{p}) e^{-ip^0(t-t_0)} \end{aligned} \tag{Ⅲ.33}$$

同様に $[H_0,\ a^\dagger(\boldsymbol{p})] = p^0 a^\dagger(\boldsymbol{p})$ より（或いは，上式両辺のエルミート共役より）

$$a_{\rm H}^\dagger(\boldsymbol{p}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} a^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{-iH_0(t-t_0)} = a^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ip^0(t-t_0)} \tag{Ⅲ.34}$$

が得られ，これを用いて，実スカラー場は

$$\phi_{\rm H}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx} \right] \tag{Ⅲ.35}$$

♯Ⅲ.5 但し，実際には，相互作用の下では「生成消滅演算子」という簡単な解釈は難しい．

同じように複素スカラー場も

$$\phi_{\rm H}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \tag{Ⅲ.36}$$

とまとめられる．これは，正に（Ⅲ.8, Ⅲ.11）式において係数 $a(\boldsymbol{k}), a^*(\boldsymbol{k})$, $b(\boldsymbol{k})$, $b^*(\boldsymbol{k})$ を演算子 $a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$, $b(\boldsymbol{k}), b^\dagger(\boldsymbol{k})$ で置き換えたものである．

従って，正準交換関係を設定する段階では場の演算子は量子化の時刻において定義されるにすぎないが，実際には，量子化前の任意の時刻の平面波展開式をそのまま量子場に移行させることが出来，それは，ハイゼンベルク描像の場の，時間に依存しない生成消滅演算子 $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})$ を用いた表現になる訳である．

Ⅲ.7 スカラー場の基本的物理量

ネータの定理で与えられる基本的な保存量をスカラー場演算子で表し，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ 及び $b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ がどのような粒子を生成消滅させるのかを明らかにしよう．スカラー場は並進・ローレンツ変換の下で不変であり，更に実スカラーの場合は位相変換も受けないので，結果は大変に簡単なものとなる．

<u>エネルギー運動量演算子</u>

ネータの定理における 4 元運動量ベクトル

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{P}^\mu(x) = \int d^3\boldsymbol{x}\,\sum_a :\Big[\,\pi_a(x)\partial^\mu u_a(x) - g^{0\mu}\mathcal{L}(x)\Big]:$$

の $u_a(x)$ と $\pi_a(x)$ に実スカラー場の対応量 $\phi(x)$，$\dot{\phi}(x)$ をそれぞれ代入すると

$$H\,(=P^0)\;=\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\;:\Big[\,\dot{\phi}^2(x) + [\nabla\phi(x)]^2 + m^2\phi^2(x)\Big]:$$

$$\boldsymbol{P} = -\int d^3\boldsymbol{x}\;:\dot{\phi}(x)\nabla\phi(x):$$

となる．ここで ϕ の平面波展開を代入すると H については既に求めた形

$$H = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$$

を，また空間成分 $\boldsymbol{P}$ についても同様の計算により

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{k}\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{III.37}$$

を得る．$a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$ は個数密度演算子だったから，それに k^0，$\boldsymbol{k}$ を掛けて足し合わせた（積分した）ものが系のエネルギー，運動量を表すということは，正に $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ で生成される粒子がエネルギー p^0，運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つことを示している．このことは，エネルギーについては既に示した

$$Ha^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = p^0 a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$$

という関係でも確認でき，またそこでの計算と同じように示される

$$\boldsymbol{P}a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = \boldsymbol{p}a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \tag{III.38}$$

という関係により，運動量についても裏付けられる．

問題 III.8　$H(= P^0)$ に関する計算に倣って $\boldsymbol{P}$ についての（III.37）式を導け．

複素スカラー場の場合は $b^\dagger b$ の項が加わって

$$H = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0 \left[\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k}) \,\right] \tag{III.39}$$

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{k} \left[\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k}) \,\right] \tag{III.40}$$

となり，実スカラー場の場合と全く同様の計算で

$$Ha^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = p^0 a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle\,, \qquad Hb^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = p^0 b^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \tag{III.41}$$

$$\boldsymbol{P}a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = \boldsymbol{p}a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle, \qquad \boldsymbol{P}b^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = \boldsymbol{p}b^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \tag{III.42}$$

という関係が得られる．

以上の結果に加え，実スカラー場・複素スカラー場どちらの場合でも p^0 と $\boldsymbol{p}$ の間には $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ という関係があるので，$a^\dagger, b^\dagger$ により生成される粒子の質量はどちらも m であることもわかる．

問題 III.9　H，$\boldsymbol{P}$ の固有値方程式（III.41, III.42）が成立することを確認せよ．

また，$a^{(\dagger)}$，$b^{(\dagger)}$ の交換関係と P^μ（H 及び $\boldsymbol{P}$）の表現を用いれば

$$i\partial^\mu \phi(x) = [\,\phi(x),\, P^\mu\,] \tag{III.43}$$

という**一般化されたハイゼンベルク方程式**（Generalized Heisenberg equation）が導かれ，さらに，この方程式と公式（III.32）を用いて

$$\phi(x+a) = e^{iPa}\phi(x)e^{-iPa} \tag{III.44}$$

という関係が得られる．これは P^μ が時空の並進という変換の生成子になっていることを示している．この中で $x=0$，$a=x$ と置き直せば

$$\phi(x) = e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx} \tag{III.45}$$

となるが，これは散乱振幅の間の関係を調べる際などでよく利用される重要な関係である．

問題 III.10　生成消滅演算子で表された P^μ，$\phi(x)$ を用いて一般化されたハイゼンベルク方程式（III.43）を確かめ，それに基づき（III.44）式が成り立つことを示せ．

スピン角運動量演算子

ローレンツ変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ に対する不変性から角運動量テンソルが導入されたが，特にこの変換で添字を空間成分 $i, j\,(=1,2,3)$ に限ったものは 3 次元空間の座標回転だから，対応する成分を $J^1\,(=J_x) = M^{23}$，$J^2\,(=J_y) = M^{31}$，$J^3\,(=J_z) = M^{12}$ と置けば

$$J^i = \int d^3\boldsymbol{x}\ :[\,x^j\mathcal{P}^k(x) - x^k\mathcal{P}^j(x) + 2\sum_a \pi_a(x)\Psi_a^{jk}(x)\,]:$$

（但し，i, j, k は 1,2,3 またはその循環）は 3 次元的な全角運動量を与える．スカラー場の場合は $\Psi_a^{jk} = 0$ であるため，

$$\boldsymbol{J} = \int d^3\boldsymbol{x}\,[\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\mathcal{P}}(x)\,] \tag{III.46}$$

となる．これは全角運動量を与える式であるにも拘らず，明らかに軌道角運動量の項しか含まれていない．スピン角運動量に対応する項は場の変換から生じるが，上で述べたようにスカラー場のローレンツ不変性によりその項は存在しない訳で，これはスカラー粒子のスピンが0であることを意味している．

電荷演算子

位相変換に対するネータカレント及びその第0成分の空間積分

$$\theta^\mu(x) = -i\sum_a q_a\Big[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))}u_a(x) - \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a^*(x))}u_a^*(x)\Big]$$

$$Q = -i\int d^3\boldsymbol{x}\sum_a q_a[\,\pi_a(x)u_a(x) - \pi_a^*(x)u_a^*(x)\,]$$

をスカラー場に適用しよう．

実スカラー場の場合は，場は変換を受けない，つまり一般公式の導出において $\delta u_a(x) = 0$ ということで，ネータカレント自体が0となる．他方，複素スカラー場の場合は θ^μ の空間成分を $\boldsymbol{j}$ と表せば $\pi = \dot{\phi}^\dagger$，$\pi^\dagger = \dot{\phi}$ を用いて

$$\boldsymbol{j}(x) = iq:\Big[\,[\nabla\phi^\dagger(x)]\phi(x) - \phi^\dagger(x)[\nabla\phi(x)]\,\Big]: \tag{Ⅲ.47}$$

$$Q = -iq\int d^3\boldsymbol{x}\ :[\,\dot{\phi}^\dagger(x)\phi(x) - \phi^\dagger(x)\dot{\phi}(x)\,]: \tag{Ⅲ.48}$$

を得る．

スカラー場は読者にはあまり馴染みがないかも知れないが，上記（Ⅲ.47）の $\boldsymbol{j}(x)$ は電荷 q のスカラー粒子の流れ，つまり電流（密度）と同じ形である．従って，(Ⅲ.48) の Q はまさしく電荷であり，位相変換 $u_a \to e^{iq_a\theta}u_a$ から生まれる保存則は確かに電荷保存則なのである．このように考えると，実スカラー場も $q=0$ の位相変換を受けると見なすことができる．つまり，実スカラー場と複素スカラー場が表すのは，それぞれ電気的に中性なスカラー粒子と荷電スカラー粒子ということである．これより，実スカラー場は**中性スカラー場**（Neutral scalar field），複素スカラー場は**荷電スカラー場**（Charged scalar field）とも呼ばれる．

電荷 Q を生成消滅演算子で表現しよう．上記 Q の右辺第2項は係数の iq も含めれば第1項のエルミート共役（$h.c.$）になっていることに注意して

$$\begin{aligned}
Q &= -iq\int d^3\boldsymbol{x}\ :\dot{\phi}^\dagger(x)\phi(x): +(\ h.c.\ ) \\
&= q\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\, k^0 : \Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx} - b(\boldsymbol{k})e^{-ikx}\,\Big] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \Big[\, a(\boldsymbol{q})e^{-iqx} + b^\dagger(\boldsymbol{q})e^{iqx}\,\Big]: +(\ h.c.\ ) \\
&= q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\, k^0\int d^3\boldsymbol{x}\Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{q})e^{i(k-q)x} + a^\dagger(\boldsymbol{k})b^\dagger(\boldsymbol{q})e^{i(k+q)x} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - a(\boldsymbol{q})b(\boldsymbol{k})e^{-i(k+q)x} - b^\dagger(\boldsymbol{q})b(\boldsymbol{k})e^{-i(k-q)x}\,\Big] \\
&\quad +(\ h.c.\ )
\end{aligned}$$

（$\boldsymbol{x}$ 積分で指数関数から δ 関数が生じ，$\boldsymbol{q}$ 積分が簡単に実行できる）

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})b^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2ik^0x^0} \\
&\qquad\qquad - a(-\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})e^{-2ik^0x^0} - b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\,\Big] + (\ h.c.\ )
\end{aligned}$$

ここで，第2·3項は（$h.c.$）との足し算で打ち消しあう（これは積分変数 $\boldsymbol{k}$ を $-\boldsymbol{k}$ に変えてみれば確認できる）．従って，

$$Q = q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\,\Big] = q(N_a - N_b) \qquad (\text{III}.49)$$

となり，これより

$$Qa^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = +qa^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle, \quad Qb^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = -qb^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \qquad (\text{III}.50)$$

という関係も導かれるので，$a^\dagger$，$b^\dagger$ は電荷がそれぞれ $+q$，$-q$ の粒子を1個生成する作用があることがわかる．これらは共に質量が m の粒子を生むことと考え合わせれば，正に $a^\dagger$ は粒子，$b^\dagger$ は反粒子の生成演算子となっていることが理解できる．

問題 III.11　上記の（III.50）式が成り立つことを確かめよ．

Ⅲ.8 生成消滅演算子のローレンツ及びC·P·T変換性

生成消滅演算子の基本的機能について一通りの説明は終わったので，次のステップとしてローレンツ変換およびC·P·T変換の下でのこの演算子の振る舞いを調べよう．なお，時空の並進も重要な変換ではあるが，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$，$b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ に与える影響という観点では，これは単に $e^{\pm ipa}$（a: 並進ベクトル）という位相因子を生む効果しか持たないので，ここでは取り上げない．

ローレンツ変換

この章の冒頭で述べたようにクライン-ゴルドン方程式に従う古典場のローレンツ変換性は

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

（$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$）なので，量子場の変換性は（Ⅱ.60）式に従って

$$U(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda)^{-1} = \phi(x') \tag{Ⅲ.51}$$

となる．この両辺に ϕ の平面波展開を代入すると♯Ⅲ.6

$$\text{左辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[U(\Lambda)a(\boldsymbol{k})U(\Lambda)^{-1}e^{-ikx} + U(\Lambda)b^{\dagger}(\boldsymbol{k})U(\Lambda)^{-1}e^{ikx} \right]$$
$$\text{右辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx'} + b^{\dagger}(\boldsymbol{k})e^{ikx'} \right]$$

となるので，右辺において積分変数 k を $k' = \Lambda k$ に替える：

$$\text{右辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}' \left[a(\boldsymbol{k}')e^{-ik'x'} + b^{\dagger}(\boldsymbol{k}')e^{ik'x'} \right]$$

ここで，積分要素 $d^3\tilde{\boldsymbol{k}}$ はローレンツ変換の下で不変

$$d^3\tilde{\boldsymbol{k}}' = d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \tag{Ⅲ.52}$$

であることに注意しよう．事実，これは

$$\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \equiv \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3(2k^0)} = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^4k\, \delta(k^2 - m^2)$$

♯Ⅲ.6 この節では，一般性を考慮し複素場を中心として議論を進める．

と書き換えることで理解できる．また，kx は4元ベクトル同士の内積だから，勿論これもローレンツ不変 $k'x' = kx$ である．従って，

$$右辺 = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a(\boldsymbol{k}')e^{-ikx} + b^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{ikx} \right]$$

となるので，両辺を比較して生成消滅演算子のローレンツ変換性

$$U(\Lambda)a(\boldsymbol{p})U(\Lambda)^{-1} = a(\Lambda\boldsymbol{p}), \quad U(\Lambda)b(\boldsymbol{p})U(\Lambda)^{-1} = b(\Lambda\boldsymbol{p}) \tag{III.53}$$

を得る．但し，ここで，Λp の空間成分も同じ記号を用いて $\Lambda\boldsymbol{p}$ と表している．

このとき，状態の変換性はどうなるだろうか．運動量が $\boldsymbol{p}$ のスカラー粒子 a が1個存在する状態を $|\boldsymbol{p}\rangle$ と表せば，これは

$$|\boldsymbol{p}\rangle \quad \to \quad U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle$$

という変換を受けることになるが，真空状態の不変性 $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$ より

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle = U(\Lambda)a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = U(\Lambda)a^\dagger(\boldsymbol{p})U(\Lambda)^{-1}\underbrace{U(\Lambda)|0\rangle}_{|0\rangle} = a^\dagger(\Lambda\boldsymbol{p})|0\rangle$$

となるので，

$$|\boldsymbol{p}\rangle \quad \to \quad U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle = |\Lambda\boldsymbol{p}\rangle \tag{III.54}$$

という予想通りの結果が得られる．ここで，簡単のため a の1粒子状態を用いたが，粒子の種類が b であっても，また複数個あっても同様に計算できることは明らかだろう．

<u>C変換</u>

第I章における反粒子の解説（16頁）で述べたように，ϕ で記述されるスカラー粒子に対する反粒子波動関数は ϕ^* であった．従って，実スカラー場の場合は，反粒子は自分自身に等しいことになる．このような場（粒子）は**真正中性粒子**（Strictly neutral particle）と呼ばれる．この変換の演算子を $\mathcal{C}$ と表せば（II.60）式は

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi(x) \tag{III.55}$$

となる．この両辺に ϕ の平面波展開を代入すれば容易にわかるように，生成消滅演算子も不変：

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = a(\boldsymbol{p}) \tag{Ⅲ.56}$$

これに対して，複素スカラー場 $\phi(x)$, $\phi^\dagger(x)$ はＣ変換で互いに移り変わる：

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi^\dagger(x), \quad \mathcal{C}\phi^\dagger(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi(x) \tag{Ⅲ.57}$$

生成消滅演算子については，$\phi^\dagger$ の平面波展開では e^{-ikx}，e^{ikx} の係数がそれぞれ $b(\boldsymbol{k})$，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ になることに注意して上式の両辺を比較することで

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = b(\boldsymbol{p}), \quad \mathcal{C}b(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = a(\boldsymbol{p}) \tag{Ⅲ.58}$$

が得られる．正に粒子・反粒子を入れ換えるというＣ変換の作用を示している．

Ｐ変換

スカラーという量は，１成分のみで時空の１点 x に依存して決まる量なので，空間を $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \tilde{x}^\mu \equiv (t,\ -\boldsymbol{x})\ (= x_\mu)$ と反転させても古典場の波動関数自体には本質的な変化は生じない．実際，変換後の波動関数を $\phi'(x')$ として，変換後の世界でのクライン-ゴルドン方程式は $\Box' = \tilde{\partial}_\mu \tilde{\partial}^\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \Box$ より

$$(\Box + m^2)\phi'(x') = 0$$

である．従って，許される変換形はせいぜい $\phi(x) \rightarrow P\phi(\tilde{x})$ というものである．しかも，この変換を２回続ければ状態は元に戻ることから $P^2 = 1$，つまり $P = \pm 1$ でなければならないので，場の変化は

$$\phi(x) \rightarrow \pm\phi(\tilde{x})$$

のどちらかである．これに伴い量子スカラー場も

$$\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = \pm\phi(\tilde{x}) \tag{Ⅲ.59}$$

を満たすことになる．ここで，＋符号をとるものはスカラー場，－は**擬スカラー**（Pseudo scalar）場と呼ばれ，対応する P の値（$=\pm 1$）は粒子の**内部偶奇性**または**内部パリティ**（Intrinsic parity）という名を持っている．

生成消滅演算子については，上式において

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,\mathcal{P}a(\boldsymbol{k})\mathcal{P}^{-1}e^{-ikx} + \mathcal{P}b^\dagger(\boldsymbol{k})\mathcal{P}^{-1}e^{ikx}\,] \\
\text{右辺} &= \pm\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ik\tilde{x}} + b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik\tilde{x}}\,]
\end{aligned}
$$

（ここで積分変数 $\boldsymbol{k}$ を $-\boldsymbol{k}$ に変えると $k\tilde{x}\to kx$ となるので）

$$
= \pm\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(-\boldsymbol{k})e^{-ikx} + b^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{ikx}\,]
$$

を比較して

$$
\mathcal{P}a(\boldsymbol{p})\mathcal{P}^{-1} = \pm a(-\boldsymbol{p}), \quad \mathcal{P}b(\boldsymbol{p})\mathcal{P}^{-1} = \pm b(-\boldsymbol{p}) \tag{III.60}
$$

を得る．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ は同じ性質のベクトルだが，確かに $\boldsymbol{p}$ の符号も逆転している．

T変換

C変換は，その定義が粒子（場）自体に関するものなので意味は明確であり，またP変換の場合はある程度直感に頼る考察もできたが，T変換はその効果が必ずしも明確ではないので基本に立ち返って考えてみよう．

古典場 $\phi(x)$ がクライン-ゴルドン方程式 $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$ を満たすとした場合，時間反転された世界の方程式は，変換された場を $\phi'(x') = T\phi(x)$ $(x' = -\tilde{x} = (-x^0, \boldsymbol{x}))$ とすれば $\Box' = (-\tilde{\partial}_\mu)(-\tilde{\partial}^\mu) = \partial_\mu\partial^\mu = \Box$ より

$$
(\Box + m^2)\phi'(-\tilde{x}) = 0
$$

だから，体系がT不変なら $\phi'(-\tilde{x})$ は $\phi(x)$ と同じ方程式を満たさなければならない．この要請と，$T^2\phi = \phi$ であることとを考え合わせれば，まず思い浮かぶのはP変換と類似の $\phi'(-\tilde{x}) = \pm\phi(x)$ という可能性だろう．しかし，これを認めると困ったことになる．ϕ，ϕ' の平面波展開の中で時間座標が $-x^0$ になる

ということはエネルギーの符号が逆になることに等しい．つまり，上式の左辺と右辺で対応する項の一方は正エネルギーの寄与のみを受け，他方は負エネルギーの寄与のみを受けることになる．空間反転の場合はその符号は $-\infty$ から $+\infty$ まで積分される 3 次元運動量に吸収させることができたが，この場合は事情が異なるのである．そこで，$\phi^*(x)$ も $\phi(x)$ と同じ方程式を満たしていることに着目し，$T\phi(x) = \pm\phi^*(x)$ と考えれば問題は解決する：

$$\phi'(-\tilde{x}) = \pm\phi^*(x) \tag{Ⅲ.61}$$

次に，量子状態のT変換演算子 $\mathcal{T}$ の性質を見てみよう．始状態 $|\Psi_i\rangle$ から終状態 $|\Psi_f\rangle$ への遷移振幅 $\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$ の間に $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(=\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}) = 1$ を挿入してみる．すると，もし $\mathcal{T}$ が $\langle\Psi_f|U^\dagger|\Psi_i\rangle = \langle U\Psi_f|\Psi_i\rangle$ を満たす通常のユニタリ演算子なら $\langle\mathcal{T}\Psi_f|\mathcal{T}\Psi_i\rangle = \langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$ となるが，これは我々の望む関係ではない．T変換は時間軸を逆転させるのだから，始状態と終状態も入れ換わらなければならないのに，上式ではそうなっていないからである．この困難を回避するには，演算子 $\mathcal{T}$ に

$$\langle\Psi_f|\mathcal{T}^\dagger|\Psi_i\rangle = \langle\mathcal{T}\Psi_f|\Psi_i\rangle^*(=\langle\Psi_i|\mathcal{T}\Psi_f\rangle) \tag{Ⅲ.62}$$

という性質を持たせればよい．実際，その場合には

$$\langle\mathcal{T}\Psi_f|\mathcal{T}\Psi_i\rangle = \langle\Psi_f|\Psi_i\rangle^* = \langle\Psi_i|\Psi_f\rangle \tag{Ⅲ.63}$$

となり，望ましい関係が実現される．この性質を持つ演算子は**反ユニタリ**（Anti-unitary）**演算子**と呼ばれる．(Ⅲ.62) は任意の状態に対して要求されるので $|\Psi_f\rangle = \sum_n c_n|\psi_n\rangle$（$c_n$ は任意の複素数）と置いてみると $\langle\Psi_f|\mathcal{T}^\dagger|\Psi_i\rangle = \sum_n c_n^*\langle\psi_n|\mathcal{T}^\dagger|\Psi_i\rangle = \sum_n c_n^*\langle\Psi_i|\mathcal{T}\psi_n\rangle$ より

$$|\mathcal{T}\Psi_f\rangle\,(=\mathcal{T}|\Psi_f\rangle = \mathcal{T}\sum_n c_n|\psi_n\rangle\,) = \sum_n c_n^*|\mathcal{T}\psi_n\rangle \tag{Ⅲ.64}$$

つまり，$\mathcal{T}$ には複素数（c）との順序交換において c を c^* に置き換える作用

$$\mathcal{T}c = c^*\mathcal{T}, \qquad \mathcal{T}^{-1}c = c^*\mathcal{T}^{-1}$$

がある．このような演算子は**反線形**（Antilinear）演算子と呼ばれる．[♯Ⅲ.7] これより，反ユニタリ演算子とは，ユニタリな反線形演算子と表現できる．

さて，47 頁の一般公式 $\langle \Phi' | \phi(x') | \Phi' \rangle = D(\Lambda) \langle \Phi | \phi(x) | \Phi \rangle$ を $\phi'(-\tilde{x}) = \pm \phi^*(x)$ に適用すると

$$\langle \mathcal{T}\Phi | \phi(-\tilde{x}) | \mathcal{T}\Phi \rangle = \pm \langle \Phi | \phi(x) | \Phi \rangle^*$$

であるが，ここで学んだT変換の基本的性質より

$$\text{左辺} = \langle \Phi | \mathcal{T}^{-1} \phi(-\tilde{x}) \mathcal{T} | \Phi \rangle^*$$

となり，これより演算子の関係式

$$\mathcal{T} \phi(x) \mathcal{T}^{-1} = \pm \phi(-\tilde{x}) \tag{Ⅲ.65}$$

が得られる．この符号の不定性に関しては自由粒子だけを考えていては決まらないが，ディラック粒子との相互作用にT不変性を課せばスカラー場の場合は $+$，擬スカラー場は $-$ 符号となることが知られている（Ⅳ.5 で扱うディラック場のT変換，特に 110 頁の問題とそれに続く解説を参照せよ）．

生成消滅演算子については，$\mathcal{T}^{-1} c = c^* \mathcal{T}^{-1}$ であること，つまり

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \phi(x) \mathcal{T}^{-1} &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[\mathcal{T} a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} \mathcal{T}^{-1} + \mathcal{T} b^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx} \mathcal{T}^{-1} \right] \\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[\mathcal{T} a(\boldsymbol{k}) \mathcal{T}^{-1} e^{ikx} + \mathcal{T} b^\dagger(\boldsymbol{k}) \mathcal{T}^{-1} e^{-ikx} \right] \end{aligned}$$

に注意すれば，あとは C · P 変換の場合と同様に

$$\begin{aligned} \phi(-\tilde{x}) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a(\boldsymbol{k}) e^{ik\tilde{x}} + b^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-ik\tilde{x}} \right] \\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a(-\boldsymbol{k}) e^{ikx} + b^\dagger(-\boldsymbol{k}) e^{-ikx} \right] \end{aligned}$$

との比較により

$$\mathcal{T} a(\boldsymbol{p}) \mathcal{T}^{-1} = \pm a(-\boldsymbol{p}), \qquad \mathcal{T} b(\boldsymbol{p}) \mathcal{T}^{-1} = \pm b(-\boldsymbol{p}) \tag{Ⅲ.66}$$

[♯Ⅲ.7] 詳しくは，例えば文献 [4]（I）の 54–55 頁，文献 [5] の 58–59 頁，文献 [6] の 4-2 節および付録A参照．

が得られる．時間反転で運動の向きは逆転するはずだから自然な結果である．

Ⅲ.9 スカラー場の伝播関数

実スカラー場の伝播関数

共変的な摂動計算で不可欠な役割を果たす**ファインマン伝播関数**（Feynman propagator： 以後「伝播関数」と略す）いう量を導入しよう．これは，実スカラー場の場合には $\Delta_{\rm F}(x)$ と表され，

$$\Delta_{\rm F}(x-y) = i\langle 0|{\rm T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \tag{Ⅲ.67}$$

と定義される．[♯Ⅲ.8] ここで，$\phi(x)$ としては相互作用も含めたハイゼンベルク場が用いられることもあるが，ここでは自由ハイゼンベルク場を採る．また，T はそれに続く時間依存演算子を時間順序に並べ直して掛け合わせることを意味し，その積は**時間順序積**（あるいは**T積**: Time-ordered product）と呼ばれる．例えば $y^0 > z^0 > x^0$ ならば

$${\rm T}[\,A(x)B(y)C(z)\,] = B(y)C(z)A(x)$$

である．但し，これはボーズ演算子の例であり，フェルミ演算子同士の場合には，順序を 1 回交換する度にマイナス符号を付けるという規則も加わる（この例では 2 回交換があるので，フェルミ演算子でも符号はこのままだが）．

このT積は，階段関数 $\theta(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}
&{\rm T}[\,A(x)B(y)C(z)\,]\\
&= A(x)B(y)C(z)\theta(x^0-y^0)\theta(y^0-z^0) + A(x)C(z)B(y)\theta(x^0-z^0)\theta(z^0-y^0)\\
&+B(y)A(x)C(z)\theta(y^0-x^0)\theta(x^0-z^0) + B(y)C(z)A(x)\theta(y^0-z^0)\theta(z^0-x^0)\\
&+C(z)A(x)B(y)\theta(z^0-x^0)\theta(x^0-y^0) + C(z)B(y)A(x)\theta(z^0-y^0)\theta(y^0-x^0)
\end{aligned}$$

♯Ⅲ.8 $\Delta_{\rm F}$ の定義には逆符号や i を除く流儀もある．(Ⅲ.67) の右辺が実際に $x-y$ にしか依存しないことは，$\phi(x)$ と $\phi(y)$ に (Ⅲ.35) を代入することで確認できる（後述の (Ⅲ.73) 式参照）．

と表すことが出来る．階段関数とは，記法のところにも書いたように，$\theta(x>0)=1$, $\theta(x=0)=1/2$, $\theta(x<0)=0$ と定義される関数で，微分するとデルタ関数になるという性質を持つ．本書では必要ないが，摂動計算への応用を考えて一般的な式も与えておこう：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}[\,A_1(x_1)A_2(x_2)\cdots A_n(x_n)\,]\\
&\quad=\sum_P A_{p(1)}(x_{p(1)})A_{p(2)}(x_{p(2)})\cdots A_{p(n)}(x_{p(n)})\\
&\qquad\times\theta(x^0_{p(1)}-x^0_{p(2)})\theta(x^0_{p(2)}-x^0_{p(3)})\cdots\theta(x^0_{p(n-1)}-x^0_{p(n)})
\end{aligned}\tag{III.68}$$

ここで $\{p(1), p(2), \cdots, p(n)\}$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ を並べ替えた一つの順列であり，$\sum_P$ はこのような順列すべてに亙る和を意味する．従って，項の総数は $n!$ である．

上で導入した $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ は，$\phi(x)$ がクライン-ゴルドン方程式 $(\Box+m^2)\phi(x)=0$ を満たすことより，クライン-ゴルドン演算子 $(\Box+m^2)$ のグリーン（Green）関数にもなっている：

$$(\Box+m^2)\Delta_{\mathrm{F}}(x)=\delta^4(x)\tag{III.69}$$

実際，

$$\begin{aligned}
\partial^\mu\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,]&=\partial^\mu[\,\phi(x)\phi(0)\theta(x^0)+\phi(0)\phi(x)\theta(-x^0)\,]\\
&=[\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0)+\phi(x)\phi(0)\partial^\mu\theta(x^0)\\
&\quad+\phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\theta(-x^0)+\phi(0)\phi(x)\partial^\mu\theta(-x^0)
\end{aligned}$$

において，量子化条件の同時刻交換関係および $d\theta(x)/dx=\delta(x)$ を用いると

$$\begin{aligned}
&\text{右辺第 2 項}+\text{第 4 項}=\delta^{\mu0}[\,\phi(x)\phi(0)\delta(x^0)-\phi(0)\phi(x)\delta(x^0)\,]\\
&=\delta^{\mu0}[\,\phi(x),\ \phi(0)\,]\delta(x^0)=\delta^{\mu0}[\,\phi(x),\ \phi(0)\,]_{x^0=0}\,\delta(x^0)=0
\end{aligned}$$

となるので

$$\Box\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,]=\partial_\mu\partial^\mu\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,]$$

$$= [\Box\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0)$$
$$+\phi(0)[\Box\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0)$$

となり，これより導かれる関係

$$\begin{aligned}
&(\Box + m^2)\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,] \\
&= [(\Box + m^2)\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) \\
&+\phi(0)[(\Box + m^2)\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0) \\
&= [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0) \\
&= [\partial^0\phi(x)]\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)[\partial^0\phi(x)]\delta(x^0) = \dot\phi(x)\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)\dot\phi(x)\delta(x^0) \\
&= [\,\pi(x),\ \phi(0)\,]\delta(x^0) = [\,\pi(x),\ \phi(0)\,]_{x^0=0}\,\delta(x^0) = -i\delta^3(\boldsymbol{x})\delta(x^0) = -i\delta^4(x)
\end{aligned}$$

の両辺を真空状態で挟み i を掛けて（Ⅲ.69）式が得られる．

運動量表示

さて，摂動計算に頻繁に顔を出すのは，$\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ よりもそのフーリエ変換（運動量表示の伝播関数）

$$\Delta_{\mathrm{F}}(p) = \int d^4x\, e^{ipx}\Delta_{\mathrm{F}}(x) \tag{Ⅲ.70}$$

の方である．複素積分により，これは

$$\Delta_{\mathrm{F}}(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \tag{Ⅲ.71}$$

となること，[♯Ⅲ.9] 或いは同じことだが

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} \tag{Ⅲ.72}$$

が成立することを示すことが出来る．但し，$\varepsilon(>0)$ は，全ての計算が完了したら 0 と置く微小定数（無限小定数）である．[♯Ⅲ.10]

♯Ⅲ.9 ここの 4 元運動量 p には何の制限も付いていないため，一般には $p^2 \neq m^2$ である．このような状態はオフシェル（Off shell）と言われる．一方，直接観測にかかる粒子の運動量は当然 $p^2 = m^2$ を満たさなければならない．そのような状態はオンシェル（On shell）と呼ばれる．

♯Ⅲ.10 無限小定数なので，これに有限の因子を掛けたり割ったりしたものも同じく ε と書かれる．

これを確かめるには，まず aa, $a^\dagger a$, $a^\dagger a^\dagger$ は真空状態で挟めば皆 0 になるため

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\
&= \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle\theta(x^0-y^0) + \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle\theta(y^0-x^0) \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\Big[\langle 0|a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle e^{-i(kx-qy)}\theta(x^0-y^0) \\
&\qquad\qquad + \langle 0|a(\boldsymbol{q})a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle e^{i(kx-qy)}\theta(y^0-x^0)\Big] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\Big[e^{-ik(x-y)}\theta(x^0-y^0) + e^{ik(x-y)}\theta(y^0-x^0)\Big] \qquad (\text{III}.73)
\end{aligned}
$$

となること，及び

$$
\frac{e^{-ik(x-y)}}{m^2-k^2-i\varepsilon}
$$

は，k^0 複素平面上において図 III.1 に示すような点 $k^0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}-i\varepsilon\,(\equiv k_1^0)$ と $k^0=-\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}+i\varepsilon\,(\equiv k_2^0)$ に極を持つことに注意する．

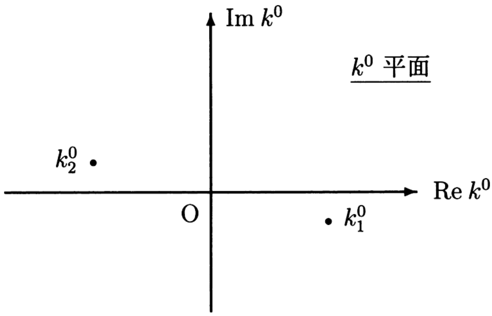


図 III.1

その上で，$e^{-ik(x-y)}$ は $x^0-y^0<0$ のときには $\mathrm{Im}\,k^0>0$ の半径無限大の半円（上半面）で，また $x^0-y^0>0$ のときには $\mathrm{Im}\,k^0<0$ の半径無限大の半円（下半面）で 0 になることを用いて，

$$
\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{m^2-k^2-i\varepsilon}
$$

の中の k^0 積分路を，図 Ⅲ.2 のようにそれぞれ上半円一周・下半円一周に拡げ，それに対してコーシー（Cauchy）の積分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\frac{f(z)}{z-a}$$

（但し，積分路 C は閉曲線でその向きは反時計回り，a は C 内部の点）を適用すれば直ちに（Ⅲ.73）式に一致する結果が得られる．ここで重要なポイントは k^2 を $k^2+i\varepsilon$ と置き換えることで上記の積分公式の利用を可能にしたことである．これを以下 $+i\varepsilon$ ルールと呼ぶことにしよう．

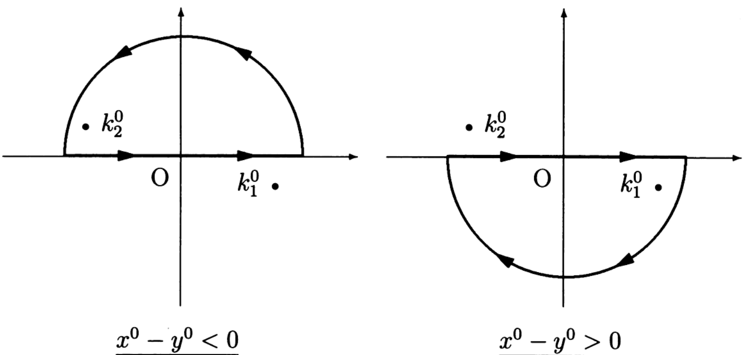


図 Ⅲ.2

グリーン関数の利用

上記のように伝播関数の運動量表示を求めるのは“正攻法”であるが，グリーン関数の関係（Ⅲ.69）を用いても以下のように同じ結果を導き出すことができる： まず，(Ⅲ.69）の左辺に

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx}\,\Delta_{\mathrm{F}}(k)$$

を，また右辺には

$$\delta^4(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx}$$

を代入して両辺を比較すれば，$\{e^{-ikx}\}$ が直交関数系を構成していることより，任意の p に対して $(m^2-p^2)\Delta_{\mathrm{F}}(p^2)=1$ という関係が得られる．従って，これより

$$\Delta_{\mathrm{F}}(p)=\frac{1}{m^2-p^2}$$

となる．但し，このままの形だと $p^2=m^2$ で分母が0となってしまうので，ここは「$+i\varepsilon$ ルール」を適用して

$$\Delta_{\mathrm{F}}(p)=\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon}$$

に到達するという訳である．

複素スカラー場の伝播関数

複素スカラー場の伝播関数は

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y)=i\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \tag{III.74}$$

と定義される．その運動量表示を求めるため，実スカラー場の場合と同じく $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ の ϕ，$\phi^\dagger$ にその平面波展開を代入しよう．すると，

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle\\
&=\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle\theta(x^0-y^0)+\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle\theta(y^0-x^0)\\
&=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\Big[\langle 0|a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle e^{-i(kx-qy)}\theta(x^0-y^0)\\
&\qquad+\langle 0|b(\boldsymbol{q})b^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle e^{i(kx-qy)}\theta(y^0-x^0)\Big]\\
&=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\Big[e^{-ik(x-y)}\theta(x^0-y^0)+e^{ik(x-y)}\theta(y^0-x^0)\Big]
\end{aligned}$$

となるが，これは（III.73）式と全く同じ結果である．従って，

$$\Delta_{\mathrm{F}}(p)=\int d^4x\,e^{ipx}\Delta_{\mathrm{F}}(x)$$

は実スカラー場の場合と全く同じ形になる：

$$\Delta_{\mathrm{F}}(p)=\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon} \tag{III.75}$$

共変的時間順序積

最後に，時間微分項を含むT積についての注意をしておこう．この積の定義にそのまま従えば，例えば $\dot{A}(x)$ と $B(y)$ のT積は

$$\mathrm{T}[\,\dot{A}(x)B(y)\,] = \dot{A}(x)B(y)\theta(x^0 - y^0) + B(y)\dot{A}(x)\theta(y^0 - x^0)$$

となる訳だが，これとは別に

$$\mathrm{T}^*[\,\dot{A}(x)B(y)\,] \equiv \frac{\partial}{\partial x^0}\mathrm{T}[\,A(x)B(y)\,] \tag{III.76}$$

として時間微分はT積の左側に出してしまう定義もある．これは**共変的時間順序積**（Covariant time-ordered product）あるいは T^* 積と呼ばれることもあるが，明らかに時間微分が階段関数に作用する分だけ両者に差が生じる．実は，T^* 積の方が摂動計算には有用であることが知られているので，本書では，特に断わらない限りT積はこの T^* 積を意味するものとする．但し，伝播関数に話を限れば，その定義に時間微分は含まれないのでこの差を気にする必要はない．

♠♠ ちょっと息抜き：　相対論的効果はこんなところにも !?　♠♠

筆者が大学に入学したのは1970年，公式記録によれば（？）卒業はその5年後である.「あれっ？普通の理学部って4年制とちゃうの？」というのは至極もっともな疑問だが，それに対しての筆者のこれまた公式な説明は,「ボート部で自分たちの漕ぐエイトの艇速が素晴らしすぎて，艇上で4年間過ごして陸に戻ったら5年経過していた」というものである．頭の固い物理屋 … 誰のことや？ … は「そんなことはあり得ね～」と反論するかも知れないが，これを裏付けるデータは十分にある．何しろ同じ現象を体験した者は，他にも先輩・同輩・後輩の中に何人もいるのだから v(^o^;)．

これに関する論争（???）はともかく，学生の体育会離れが嘆かれ始めて久しい．大学で勉強だけするなら確かに運動部（や他の活動）はその妨げだろうし，筆者も学部学生時代の勉強量については胸を張る自信はない．ただ，ボート部で得たものは勉強時間のロスよりも遥かに大きいと確信している．毎朝毎夕の練習で流した汗，艇上で浴びた瀬田川の水，その雫すべてが今の自分を作ったと言えばカッコつけ過ぎだろうか．

♣♣♣♣

Ⅳ. ディラック場の理論

ディラック場（粒子）の代表例は，もっとも古くから知られている素粒子の電子である．また，原子核の構成要素である陽子と中性子は，共に複数のクォークから成る複合粒子であるが，そのクォークもディラック場で記述される素粒子である．つまりは，ディラック場は物質世界の基本要素であると言える．

Ⅳ.1 ディラック場の古典論

ディラック方程式を導き正準量子化の出発点となるラグランジアン（密度）$\mathcal{L}(x)$ の形はどのようなものだろうか．ディラック方程式が共変的なのだから，それを導くラグランジアンは，ローレンツ変換の下で不変な量でなければならない．この条件が $\mathcal{L}$ の形に強い制限を与える．結論を先に述べれば，そのような $\mathcal{L}(x)$ は $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)(\equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0)$ を組み合わせることにより

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \frac{1}{2}i\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) - m\,\bar{\psi}(x)\psi(x) \\ &\equiv \frac{1}{2}i\Big[\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu[\partial_\mu\psi(x)] - [\partial_\mu\bar{\psi}(x)]\gamma^\mu\psi(x)\,\Big] - m\,\bar{\psi}(x)\psi(x) \qquad (\text{Ⅳ.1})\end{aligned}$$

と与えられる．これは確かに $\mathcal{L}^*(x) = \mathcal{L}(x)$ を満たしており，$\bar{\psi}$，ψ についての変分をとることにより，それぞれ ψ，$\bar{\psi}$ についてのディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \qquad (\text{Ⅳ.2})$$

を導く．但し，通常はこれを簡略化した形

$$\mathcal{L}(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\,\bar{\psi}(x)\psi(x) \qquad (\text{Ⅳ.3})$$

が用いられる．両者の差は $\partial_\mu[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi]$ に比例する項（発散項）であり，これは作用積分には全く寄与しないので量子化を進める上で問題になることはない．但し，ψ と $\bar{\psi}$ の間で，例えば後者に共役な一般化運動量が 0 になるなど（見掛け上の）不均衡も生じるが物理的な結果には影響しない．本書でもこれ以降 $\mathcal{L}$ として (IV.3) を用いる．

問題 IV.1　$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ に注意して (IV.1) のラグランジアンが実であることを確かめよ．次に，(IV.1) 式と (IV.3) 式のどちらから出発しても，ラグランジュ方程式としてディラック方程式が得られることを確かめよ．

上で与えた $\mathcal{L}$ より $\psi(x)$ に共役な一般化運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi_a(x) = \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_a(x)}\mathcal{L}(x) = i[\,\bar{\psi}(x)\gamma^0\,]_a = i\psi_a^\dagger(x) \tag{IV.4}$$

となり，[♯IV.1] これを用いてハミルトニアン（密度）$\mathcal{H}(x)$ が

$$\mathcal{H}(x) = -i\sum_{i=1}^{3}\bar{\psi}(x)\gamma^i\partial_i\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{IV.5}$$

と求まる．

問題 IV.2　実際に $\sum_a \pi_a(x)\dot{\psi}_a(x) - \mathcal{L}(x)$ を計算し，$\mathcal{H}(x)$ の形が (IV.5) 式になることを示せ．

ここで，$\mathcal{L}(x)$ が実際にローレンツ変換の下で不変であることを確認しておこう．まず，(I.29) 式で示したように $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ の $S(\Lambda)$ が

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$$

を満たすことより，$\bar{\psi}(x)$ の変換性は

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda) \tag{IV.6}$$

♯IV.1 実際には成分を示す添字を省略して $\pi(x) = \partial\mathcal{L}(x)/\partial\dot{\psi}(x) = i\psi^\dagger(x)$ と表すこともよくある．

となる．また，(I.22) 式

$$\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') = S(\Lambda)\,\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

は，微分項 $\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$ も $\psi(x)$ と同じ変換性を持つことを示している．これらはラグランジアン（IV.3）の右辺第 1 項（運動項）$i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$ と第 2 項（質量項）$m\bar{\psi}(x)\psi(x)$ が共にスカラーとして変換されることを意味しており，従って，確かにラグランジアンの不変性

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$$

が成り立っている．ネータの定理の節（35 頁）で述べたように，この $\mathcal{L}$ の不変性は作用積分の不変性を意味している．

問題 IV.3　(I.29) 式から出発し，変換性 (IV.6) を確かめよ．

ディラック場の平面波展開

スカラー場と同様に $\psi(x)$ の平面波解とそれに基づく一般解の平面波展開を求めよう（I.2 節 9 頁も参照）．$\psi(x) = w(p)e^{-ipx}$ とおいて，これを（IV.2）の第 1 式に代入すると

$$(\,\gamma^\mu p_\mu - m\,)w(p) = 0$$

が得られる．この方程式が $w(p) = 0$ 以外の物理的に意味のある解を持つためには，$w(p)$ の係数行列 $\gamma^\mu p_\mu - m$ の行列式が 0 でなければならない：[♯IV.2]

$$|\,\gamma^\mu p_\mu - m\,| = \begin{vmatrix} p^0 - m & -\boldsymbol{p\sigma} \\ \boldsymbol{p\sigma} & -p^0 - m \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(IV.7)}$$

これより

$$p^0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

[♯IV.2] この行列式の内容は（I.14）と同じである．但し，γ 行列の定義に β が含まれていることにより第 2 行の符号が逆になっているが，この差は以下の議論には何の影響も与えない．

が得られるので，正符号に対応する解を $w_+(\boldsymbol{p})$，負符号に対応する解を $w_-(\boldsymbol{p})$ と表すことにする：

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)w_+(\boldsymbol{p}) = 0, \qquad (-\gamma^\mu \tilde{p}_\mu - m)w_-(\boldsymbol{p}) = 0$$

但し，ここで $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ と決め，$\tilde{p}^\mu = (p^0, -\boldsymbol{p})$ と表した．

粒子の静止系（$\boldsymbol{p} = 0$）で考えれば容易に確かめられるように，上記の方程式での $w_\pm(\boldsymbol{p})$ の係数行列の階数（ランク）は 2 である．従って，線形代数の基本事項より，両方程式はどちらも二つの独立な解を持つことになる．そこで，その二つの自由度を s で表し，対応する解を $w_\pm(\boldsymbol{p}, s)$ と書き直した上で，指数関数部分 e^{-ipx}，$e^{i\tilde{p}x}$ を含めたものに任意係数を掛けて全ての $\boldsymbol{p}$，s に亙って重ね合せれば，次のような一般解が得られる：

$$\psi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\sigma [\, c_+(\boldsymbol{k}, \sigma) w_+(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{-ikx} + c_-(\boldsymbol{k}, \sigma) w_-(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{i\tilde{k}x} \,]$$

ここで，第 2 項において，積分変数を $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ と変更し，改めて $c(\boldsymbol{p}, s) \equiv c_+(\boldsymbol{p}, s)$，$d^*(\boldsymbol{p}, s) \equiv c_-(-\boldsymbol{p}, s)$，$u(\boldsymbol{p}, s) \equiv w_+(\boldsymbol{p}, s)$，$v(\boldsymbol{p}, s) \equiv w_-(-\boldsymbol{p}, s)$ と置けば

$$\psi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\sigma [\, c(\boldsymbol{k}, \sigma) u(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{-ikx} + d^*(\boldsymbol{k}, \sigma) v(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{ikx} \,] \qquad \text{(IV.8)}$$

となり，また $u(\boldsymbol{p}, s)$，$v(\boldsymbol{p}, s)$ は

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\boldsymbol{p}, s) = 0, \qquad (\gamma^\mu p_\mu + m)v(\boldsymbol{p}, s) = 0 \qquad \text{(IV.9)}$$

を満たすスピノルとなる．

実は，以下で示されるように s の自由度は，電子のスピン（大きさ $= 1/2$）の自由度に対応しており，s 自体は量子化軸の選び方に依ってスピンの z 成分（の 2 倍）やヘリシティ（Helicity：スピンの運動量方向の成分の 2 倍）を表す．従って，どちらの場合でもこのスピン量子数 s がとる値は ± 1 である．[♯IV.3]

[♯IV.3] 運動量と同じくスピン量子数でも確定値とスピン和の中とで文字を使い分けることにする．

方程式（IV.9）を解いて $u(\boldsymbol{p},s)$，$v(\boldsymbol{p},s)$ の具体形を決めるために

$$u(\boldsymbol{p},s)=\begin{pmatrix} u_+(\boldsymbol{p},s) \\ u_-(\boldsymbol{p},s) \end{pmatrix}, \qquad v(\boldsymbol{p},s)=\begin{pmatrix} v_+(\boldsymbol{p},s) \\ v_-(\boldsymbol{p},s) \end{pmatrix}$$

と置こう．すると各成分（2成分スピノル）に対して

$$(p^0-m)u_+(\boldsymbol{p},s)=\boldsymbol{p\sigma}u_-(\boldsymbol{p},s), \quad \boldsymbol{p\sigma}u_+(\boldsymbol{p},s)=(p^0+m)u_-(\boldsymbol{p},s)$$
$$(p^0+m)v_+(\boldsymbol{p},s)=\boldsymbol{p\sigma}v_-(\boldsymbol{p},s), \quad \boldsymbol{p\sigma}v_+(\boldsymbol{p},s)=(p^0-m)v_-(\boldsymbol{p},s)$$

という方程式が得られ，$p^0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ より粒子の静止系（$\boldsymbol{p}=0$）では u_- 及び v_+ 成分は0となることがわかる．そこで，これを明記するため $\chi_s\equiv u_+(\boldsymbol{p},s)/\sqrt{p^0+m}$，$\chi'_s\equiv v_-(\boldsymbol{p},s)/\sqrt{p^0+m}$ とおいて

$$u(\boldsymbol{p},s)=\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{p\sigma}}{p^0+m}\chi_s \end{pmatrix}, \qquad v(\boldsymbol{p},s)=\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p\sigma}}{p^0+m}\chi'_s \\ \chi'_s \end{pmatrix} \tag{IV.10}$$

（$\sqrt{p^0+m}$ は規格化因子）と表すことにしよう．

次に，粒子・反粒子の関係を考慮すると χ_s と χ'_s は荷電共役変換（C変換）により互いに関係づけられることになる：式 (IV.8) にC変換（I.34）を施すと

$$\psi^c(x)=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=\pm1}[\,c^*(\boldsymbol{k},\sigma)i\gamma^2u^*(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}+d(\boldsymbol{k},\sigma)i\gamma^2v^*(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}\,]$$

となり，これを (IV.8) 式

$$\psi(x)=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=\pm1}[\,c(\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}+d^*(\boldsymbol{k},\sigma)v(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,]$$

と比較すれば，C変換された世界，つまり陽電子が"電子"であり，電子が"陽電子"であるような世界では，$i\gamma^2u^*(\boldsymbol{p},s)$，$i\gamma^2v^*(\boldsymbol{p},s)$ がそれぞれ $v(\boldsymbol{p},s)$，$u(\boldsymbol{p},s)$ と同じ役割を果たし，同時に係数 c と d も入れ換わることがわかる．従って，

$$v(\boldsymbol{p},s)=i\gamma^2u^*(\boldsymbol{p},s)=C\bar{u}^t(\boldsymbol{p},s)\,,$$
$$u(\boldsymbol{p},s)=i\gamma^2v^*(\boldsymbol{p},s)=C\bar{v}^t(\boldsymbol{p},s) \tag{IV.11}$$

($C = i\gamma^2\gamma^0$：18 頁参照）が満たされるようにスピノル u と v の関係を決めるのが適切であり（第 2 式は第 1 式が満たされれば自動的に成立する），その結果として

$$\chi'_s = -i\sigma_y \chi^*_s \tag{IV.12}$$

が得られる．なお，c と d の関係は IV.5 節の C 変換において明らかになる．

χ_s の重要な例としてヘリシティ $\boldsymbol{n\sigma}$（$\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ は運動量向きの単位ベクトル）の固有状態を考えてみよう．$\boldsymbol{n}$ の極角と方位角をそれぞれ θ，ϕ とすれば

$$\boldsymbol{n\sigma} = \sum_{i=x,y,z} n_i \sigma_i = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{IV.13}$$

となるので，ヘリシティ固有値 $s(=\pm 1)$ に対応する固有スピノル χ_s は固有値方程式

$$\boldsymbol{n\sigma}\chi_s = s\chi_s \tag{IV.14}$$

の規格化された解として

$$\chi_{+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{IV.15}$$

と得られ，$\chi'_{\pm 1}$ は（IV.12）式を通じて

$$\chi'_{+1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \chi'_{-1} = -\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{IV.16}$$

となる．ここで，χ'_s が満たす固有値方程式は χ_s の場合（IV.14）と符号が逆になり

$$\boldsymbol{n\sigma}\chi'_s = -s\chi'_s \tag{IV.17}$$

（つまり $\boldsymbol{n\sigma}\chi'_{\pm 1} = \mp\chi'_{\pm 1}$）であることに注意しよう．

問題 I.4　上記の（IV.15，IV.16）が $\boldsymbol{n\sigma}$ の固有スピノルになっていることを確かめよ．

これらの２成分スピノルは

$$\chi_s^\dagger \chi_{s'} = {\chi'_s}^\dagger \chi'_{s'} = \delta_{ss'} \tag{IV.18}$$

という関係を満たしており，この結果，u と v の規格直交関係は

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)u(\boldsymbol{p}, s') = +2m\delta_{ss'}\,, && \bar{v}(\boldsymbol{p}, s)v(\boldsymbol{p}, s') = -2m\delta_{ss'}\,, \\ &\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)v(\boldsymbol{p}, s') = 0\,, && \bar{v}(\boldsymbol{p}, s)u(\boldsymbol{p}, s') = 0 \end{aligned} \tag{IV.19}$$

$$\begin{aligned} &u^\dagger(\boldsymbol{p}, s)u(\boldsymbol{p}, s') = +2p^0\delta_{ss'}\,, && v^\dagger(\boldsymbol{p}, s)v(\boldsymbol{p}, s') = +2p^0\delta_{ss'}\,, \\ &u^\dagger(\boldsymbol{p}, s)v(-\boldsymbol{p}, s') = 0\,, && v^\dagger(\boldsymbol{p}, s)u(-\boldsymbol{p}, s') = 0 \end{aligned} \tag{IV.20}$$

と与えられる．特に $\boldsymbol{n}$ の向きに z 軸をとれば $\theta = 0$ だから，

$$\chi_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi'_{+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi'_{-1} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IV.21}$$

と簡単な形になる．この場合はヘリシティとスピン z 成分の２倍は一致する．

量子数 s の意味について再度ここで確認しておこう．s が何を表すかはスピンの量子化軸に依存するが，その軸は，例えば実際に解析したい実験の条件で決められる．電子ビームを標的に衝突させる実験で，電子スピンがビーム（運動量）の向きまたは逆向きに揃っているような場合であれば，それに対応して s はヘリシティを表すように設定される，つまり，スピノル u，v の中の χ_s，χ'_s にヘリシティ固有状態を選ぶ訳である．尤も，このような解析ではビーム軸を z 軸に採ることも多く，その場合には上述のように z 成分（の２倍）とヘリシティは同じ量となる．

問題 IV.5　（IV.19，IV.20）式が成り立つことを確かめよ．

IV.2 射影演算子

ここまでに得られた基本的な量およびその組み合わせは，いずれも量子化の後に摂動計算などの基礎になるが，特に重要なのが $u(\boldsymbol{p}, s)\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)$，$v(\boldsymbol{p}, s)\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)$

という量である．任意のスピノル $w(\boldsymbol{p})$ は，運動量を $\boldsymbol{p}$ に固定すれば独立な四つのスピノル $u(\boldsymbol{p}, s=\pm1)$，$v(\boldsymbol{p}, s=\pm1)$ によって

$$w(\boldsymbol{p}) = \sum_{\sigma=\pm1} [\, c_u(\sigma) u(\boldsymbol{p}, \sigma) + c_v(\sigma) v(\boldsymbol{p}, \sigma) \,]$$

と展開できるが，この両辺に例として $u(\boldsymbol{p}, +1)\bar{u}(\boldsymbol{p}, +1)$ を左から作用させれば (IV.19) の関係から $u(\boldsymbol{p}, +1)$ 成分が抜き出される．これは線形代数における「射影（Projection）」という作用に他ならないので，$u(\boldsymbol{p}, s)\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)$，$v(\boldsymbol{p}, s)\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)$ はそれぞれの成分への**射影演算子**と呼ばれる．

この演算子の具体形を求めるために，ディラック粒子のスピンに関する性質を記述する上で重要な役割を果たす行列 γ_5 およびスピンベクトル s^μ を導入しよう．前者は

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{IV.22}$$

と定義され，我々の表示（標準表示）では

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \tag{IV.23}$$

という形をとる．この行列は $\gamma^{0,1,2,3}$ の全てと反可換という性質を持つ：

$$\{\gamma^\mu,\, \gamma_5\} = 0 \tag{IV.24}$$

一方，スピンベクトルは，粒子の静止系で

$$s^\mu = (0,\, \boldsymbol{s}), \quad |\boldsymbol{s}| = 1 \tag{IV.25}$$

と与えられる．粒子運動量が $\boldsymbol{p}$ となる一般系での形は，この s^μ にローレンツ変換を施して

$$s^\mu = \frac{1}{m}\Big(\boldsymbol{ps},\, m\boldsymbol{s} + \frac{\boldsymbol{ps}}{p^0 + m}\boldsymbol{p}\Big) \tag{IV.26}$$

となるが，実際の計算で特によく用いられるのは $\boldsymbol{p}$ 方向の偏極，つまり $\boldsymbol{n}$ をスピン量子化軸に選んだ場合で，このとき s^μ の形は

$$s^\mu = \frac{s}{m}(|\boldsymbol{p}|,\, p^0\boldsymbol{n}) \tag{IV.27}$$

となる．ここで，$s=\pm1$ がスピン量子数（この場合はヘリシティ）を表す．これらの具体形を用いれば s^μ と p^μ の間には

$$s_\mu p^\mu = 0 \tag{IV.28}$$

という関係があることも容易に確かめられる．

問題 IV.6　一つの具体例として粒子の運動量方向に z 軸を選び，$(m,0,0,0)\to(p^0,0,0,|\boldsymbol{p}|)$ となるローレンツ変換（第 0，3 成分だけが変換される簡単なものでよい）を $s^\mu=(0,\ \boldsymbol{s})$ に施すことにより（IV.26）式を確かめよ．

問題 IV.7　スピン量子化軸を運動量の向きにとった場合には $\boldsymbol{s}=s\boldsymbol{n}$ と書けることに注意して（IV.26）が（IV.27）に一致することを確かめよ．

問題 IV.8　スピンと運動量の間に（IV.28）式の関係があることを確かめよ．

これらの量を用いれば射影演算子は

$$u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s)=\frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}(\not{p}+m),\quad v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s)=\frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}(\not{p}-m) \tag{IV.29}$$

（$\not{a}\equiv a^\mu\gamma_\mu$）という形になる．但し，この表現は（よく用いられるものではあるが）誤解を招く恐れ無きにしも非ずである．と言うのは，(IV.27) 式を見ればわかるように上式左辺の u，v の s の符号に対応して右辺のスピンベクトルの中の s も符号が変わるのだが，それも含めて $\not{s}$ と表すと右辺では何も変わらないように見えてしまうからである．このような無用の混乱を避けようと思えば s^μ から s を抜き出して

$$s^\mu \equiv s e^\mu$$

と置き，(IV.29) を

$$u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s)=\frac{1+s\gamma_5 \not{e}}{2}(\not{p}+m),\quad v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s)=\frac{1+s\gamma_5 \not{e}}{2}(\not{p}-m) \tag{IV.30}$$

と表しておく方が確実だろう．勿論これは単に表現の問題であるが．

実際に上式の右辺も（左辺と同様に）特定のスピン成分を抜き出せることは次のようにして確かめられる．まず，

$$\gamma_5 \not{e} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} p^0 \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} & -|\boldsymbol{p}| \\ |\boldsymbol{p}| & -p^0 \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{IV.31}$$

及び（IV.10），(IV.14)，(IV.17) より u，v 共に $\gamma_5 \not{e}$ の固有スピノルになっていることに注意する：

$$\gamma_5 \not{e}\, u(\boldsymbol{p}, h) = h u(\boldsymbol{p}, h), \quad \gamma_5 \not{e}\, v(\boldsymbol{p}, h) = h v(\boldsymbol{p}, h) \tag{IV.32}$$

すると，$1 + s\gamma_5 \not{e}$ が $u(\boldsymbol{p}, h)$，$v(\boldsymbol{p}, h)$ に作用した結果は

$$(1 + s\gamma_5 \not{e})u(\boldsymbol{p}, h) = (1 + sh)u(\boldsymbol{p}, h), \quad (1 + s\gamma_5 \not{e})v(\boldsymbol{p}, h) = (1 + sh)v(\boldsymbol{p}, h)$$

となり，$h = s$ 成分はそのまま残るが $h = -s$ 成分は 0 になってしまう．一方，$\not{p}u = +mu$，$\not{p}v = -mv$ だから $\not{p} \pm m$ がそれぞれ u 成分（粒子成分），v 成分（反粒子成分）を抜き出すという訳である．

更に（IV.29）式または（IV.30）式において両辺のスピン和をとると

$$\sum_{\sigma=\pm 1} u(\boldsymbol{p}, \sigma)\bar{u}(\boldsymbol{p}, \sigma) = \not{p} + m, \quad \sum_{\sigma=\pm 1} v(\boldsymbol{p}, \sigma)\bar{v}(\boldsymbol{p}, \sigma) = \not{p} - m \tag{IV.33}$$

となるが，これも非常に重要な関係であり，上記のように，それぞれ粒子，反粒子成分への射影演算子であると理解できる．なお，この結果は，χ_s，χ'_s の具体的表現は使わなくともその完全性関係 $\sum_s \chi_s \chi_s^\dagger = \sum_s \chi'_s {\chi'_s}^\dagger = \mathrm{I}$ 及び（IV.10）式だけから直接導出することもできる

問題 IV.9　ヘリシティ固有状態 χ_s，χ'_s が

$$\chi_s \chi_s^\dagger = (1 + s\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})/2, \quad \chi'_s {\chi'_s}^\dagger = (1 - s\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})/2$$

という関係を満たすことを確かめ，それを用いて（IV.29）式が成立することを示せ．

IV.3 ディラック場の量子化と演算子

既に述べたように，負エネルギー解の問題を根本的に解決するにはディラック場自体を量子化して場の量子論に進まざるを得ないことが知られている．そこで，ラグランジアン

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

から出発して正準量子化の手続きに従い，これを量子論に移行させよう．

$\psi(x)$ に共役な一般化運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) = i\psi^\dagger(x)$$

と求めたので，両者の間に正準交換関係を設定すればよい．但し，この場合は正確に言えば交換関係ではなく「反交換関係」

$$\{\,\pi_a(x),\ \psi_b(x')\,\} = +i\delta_{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad \text{(IV.34)}$$

及び

$$\{\,\pi_a(x),\ \pi_b(x')\,\} = \{\,\psi_a(x),\ \psi_b(x')\,\} = 0 \qquad \text{(IV.35)}$$

（$x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$，$x'^\mu = (t, \boldsymbol{x}')$）である．何故「反交換関係」でなければならないかという理由は後に行うハミルトニアンの計算で明らかになる．この手続きにより，$\psi(x), \pi(x)$ は時刻 t で定義された演算子となり，$\psi(x)$ の平面波展開の係数 c，c^*，d，d^* もまた反交換関係を満たす演算子 c，$c^\dagger$，d，$d^\dagger$ となる：

$$\psi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm1} [\, c(\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx} + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)v(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,] \qquad \text{(IV.36)}$$

$$\begin{aligned}
\{c(\boldsymbol{p},s), c^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} = \{d(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} &= (2\pi)^3 2p^0\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \\
\{c(\boldsymbol{p},s), c(\boldsymbol{p}',s')\} = \{c^\dagger(\boldsymbol{p},s), c^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} &= \{d(\boldsymbol{p},s), d(\boldsymbol{p}',s')\} \\
= \{d^\dagger(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} &= \{c^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},s), d^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}',s')\} = 0
\end{aligned} \qquad \text{(IV.37)}$$

更に，III.6 で示した通り，自由場ならこの表現は任意の t に拡張できる．

問題 IV.10　(IV.33) 式より

$$\sum_{\sigma=\pm 1}\left[\,u(\boldsymbol{p},\sigma)u^{\dagger}(\boldsymbol{p},\sigma)+v(-\boldsymbol{p},\sigma)v^{\dagger}(-\boldsymbol{p},\sigma)\,\right]=2p^{0}$$

という関係が導かれることを確かめ，これを用いて，演算子 c, d の間に (IV.37) の関係があれば正準量子化の条件 (IV.34) が満たされることを示せ.

生成消滅演算子

演算子 $c^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},s)$, $d^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},s)$ の働きを調べるためにスカラー場の場合に倣って

$$N_c\equiv\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\sum_{\sigma}c^{\dagger}(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\sigma)\,,\quad N_d\equiv\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\sum_{\sigma}d^{\dagger}(\boldsymbol{k},\sigma)d(\boldsymbol{k},\sigma)\,,$$
$$N=N_c+N_d \tag{IV.38}$$

という演算子を導入しよう．すると，$N_{c,d}$ の固有値は共に正の整数または 0 に限られることがスカラー場のときと同じ手順で示される．次に，真空状態 $|0\rangle$ を，任意の $\boldsymbol{p}$, s に対して

$$c(\boldsymbol{p},s)|0\rangle=d(\boldsymbol{p},s)|0\rangle=0$$

を満たす状態として定義し，これを用いて $c^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle$, $d^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle$ という状態を構成すると，これらの間には

$$N_c c^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle=c^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle,\quad N_d d^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle=d^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle,$$
$$N_c d^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle=N_d c^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle=0 \tag{IV.39}$$

という関係が成り立つので，$c^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)$, $d^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)$ はそれぞれ粒子 c, d を 1 個生成する作用を持つ演算子であること，また $N_{c,d}$ は粒子 c, d の個数演算子，$c^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)c(\boldsymbol{p},s)$, $d^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)d(\boldsymbol{p},s)$ は個数密度演算子であることが示唆される．事実，$c^{(\dagger)}$, $d^{(\dagger)}$ はそれぞれ質量 m, 運動量 $\boldsymbol{p}$, スピン量子数 s, 電荷 $\pm q$ の粒子と反粒子の生成消滅演算子であることが以下で示される.

問題 IV.11　スカラー場の個数演算子に倣い $N_{c,d}$ の固有値が 0 または正の整数に限られることを示せ.

問題 IV.12　$N_{c,d}$ と $c^\dagger$, $d^\dagger$ の交換関係を求め，上記の（IV.39）の関係が成立していることを確かめよ.

IV.4 ディラック場の基本的物理量

ネータの定理をディラック場に適用し，基本的物理量がどのように表されるかを調べよう．これにより生成消滅演算子 $c^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}, s)$ 及び $d^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}, s)$ が記述する粒子の性質が具体的に理解できるようになる．

エネルギー運動量演算子

ネータの定理で与えられる 4 元運動量ベクトル

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} \sum_a : \Big[\pi_a(x)\partial^\mu u_a(x) - g^{0\mu}\mathcal{L}(x) \Big] :$$

に $u_a(x) = \psi_a(x)$，$\pi_a(x) = i\psi_a^\dagger(x)$ を代入すると

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} \; : \Big[i\psi^\dagger(x)\partial^\mu\psi(x) - g^{0\mu}\mathcal{L}(x) \Big] : \tag{IV.40}$$

が得られる．この第 0 成分 P^0 はハミルトニアン密度 (IV.5) の積分に一致する．

はじめに，その第 0 成分

$$P^0(= H) = \int d^3\boldsymbol{x} \; : \Big[i\psi^\dagger(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L}(x) \Big] :$$

が表すエネルギーについて考えよう．この H を生成消滅演算子 $c^{(\dagger)}$，$d^{(\dagger)}$ で表すには (IV.5) ではなく上式を用いる方が少し便利である．何故なら，ここの ψ に代入されることになる（IV.36）式はディラック方程式（IV.2）を満たしており，そのために第 2 項の $\mathcal{L}$ が 0 になるからである.[♯IV.4] また，ここには反交換

[♯IV.4] ラグランジアンが 0 になるからといって驚いてはいけない．他の方程式でも同じだが，ラグランジュ方程式としてのディラック方程式が導き出される前の段階では ψ はディラック方程式の解ではない（従って $\mathcal{L} \neq 0$）.

関係で量子化される場の特徴が明確に現れるので，正規積は考えず演算子の順序を保ったまま計算を進めてみる：

$$
\begin{aligned}
H &= i\int d^3\boldsymbol{x}\,\psi^\dagger(x)\dot{\psi}(x)\\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,q^0\sum_{\sigma,\rho}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}+d(\boldsymbol{k},\sigma)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}\Big]\\
&\qquad\qquad\times\Big[c(\boldsymbol{q},\rho)u(\boldsymbol{q},\rho)e^{-iqx}-d^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)v(\boldsymbol{q},\rho)e^{iqx}\Big]\\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,q^0\int d^3\boldsymbol{x}\sum_{\sigma,\rho}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{q},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{q},\rho)e^{i(k-q)x}\\
&\qquad\qquad-c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)v(\boldsymbol{q},\rho)e^{i(k+q)x}\\
&\qquad\qquad+d(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{q},\rho)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{q},\rho)e^{-i(k+q)x}\\
&\qquad\qquad-d(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)v(\boldsymbol{q},\rho)e^{-i(k-q)x}\Big]
\end{aligned}
$$

（$\boldsymbol{x}$ 積分で指数関数から 3 次元の δ 関数が生じ，$\boldsymbol{q}$ 積分が簡単に実行できる）

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\sum_{\sigma,\rho}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{k},\rho)\\
&\qquad-c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(-\boldsymbol{k},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)v(-\boldsymbol{k},\rho)e^{2ik^0x^0}\\
&\qquad+d(\boldsymbol{k},\sigma)c(-\boldsymbol{k},\rho)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u(-\boldsymbol{k},\rho)e^{-2ik^0x^0}\\
&\qquad-d(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(\boldsymbol{k},\rho)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)v(\boldsymbol{k},\rho)\Big]
\end{aligned}
$$

（u, v の規格直交関係(IV.20)を用いて）

$$
= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\sum_{\sigma}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\sigma)-d(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)\Big] \tag{IV.41}
$$

従って，この系が反交換関係に従って量子化されているなら，そのハミルトニアンは（スカラー場の場合と同じく定数を除いて）

$$
H = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\sum_{\sigma=\pm1}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\sigma)+d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d(\boldsymbol{k},\sigma)\Big] \tag{IV.42}
$$

となる．

計算を始める前に述べたように，この結果の中に，ディラック場は「反交換関係」で矛盾なく量子化されるという重要な事項が含まれている．つまり，上式

(IV.41) の最後の項で交換関係を用いると $d^\dagger d$ 項の符号が負になってしまい,「(真空を原点とする場合の) エネルギーは常に正または 0」ということが保証されなくなるのである. これは, スカラー場が「交換関係」で量子化されなければならない理由と同じく, 理論的整合性からの帰結である.

同様の計算を空間成分 (ここでは正規積に戻る)

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\boldsymbol{x} \ :\psi^\dagger(x)(-i\nabla)\psi(x):$$

についても行えば

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{k} \sum_{\sigma=\pm 1} \Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\sigma) + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d(\boldsymbol{k},\sigma) \Big] \tag{IV.43}$$

となり, 以上の結果をまとめて全成分が

$$P^\mu = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^\mu \sum_{\sigma=\pm 1} \Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\sigma) + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d(\boldsymbol{k},\sigma) \Big] \tag{IV.44}$$

と与えられる.

これを $c^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle$, $d^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle$ という状態に作用させてみよう. すると,

$$P^\mu c^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle = p^\mu c^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle, \quad P^\mu d^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle = p^\mu d^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle \tag{IV.45}$$

という結果が得られる. これは $c^\dagger(\boldsymbol{p},s)$, $d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ が確かに運動量 p^μ, 質量 m の粒子を生むことを示している.

問題 IV.13　$\boldsymbol{P}$ の生成消滅演算子による表現 (IV.43) を実際に導出し, P^0 と合わせて (IV.45) 式の関係が成立していることを確かめよ.

最後に $c^{(\dagger)}$, $d^{(\dagger)}$ の反交換関係および P^μ (P^0, $\boldsymbol{P}$) の表現を用いれば一般化されたハイゼンベルク方程式

$$i\partial^\mu\psi(x) = [\,\psi(x),\, P^\mu\,] \tag{IV.46}$$

が導かれ，これより

$$\psi(x+a) = e^{iPa}\psi(x)e^{-iPa} \tag{IV.47}$$

或いは $x \Leftrightarrow a$ と交換し，そのあとで $a=0$ と置いて

$$\psi(x) = e^{iPx}\psi(0)e^{-iPx} \tag{IV.48}$$

という関係を得る．

スピン角運動量演算子

ここでもネータの定理が与える角運動量テンソル $M^{\mu\nu}$ の空間成分から $\boldsymbol{J}$ を $J^i \equiv M^{jk}$ と定義する（i, j, k は 1,2,3 またはその循環）：

$$J^i = \int d^3\boldsymbol{x}\ :[\,x^j\mathcal{P}^k(x) - x^k\mathcal{P}^j(x) + 2\sum_a \pi_a(x)\Psi_a^{jk}(x)\,]:$$

ここにディラック場の対応量 $\pi_a = i\psi_a^\dagger$ 及び（I.28）式から得られる $\Psi_a^{jk} = -i(\sigma^{jk}\psi)_a/4$ を代入すると

$$J^i = \int d^3\boldsymbol{x}\ :\Big[x^j\mathcal{P}^k(x) - x^k\mathcal{P}^j(x) + \frac{1}{2}\psi^\dagger(x)\sigma^{jk}\psi(x)\Big]:$$

ここで

$$\begin{aligned}
\sigma^{jk} &\equiv \frac{1}{2}i[\,\gamma^j,\,\gamma^k\,] \\
&= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_j \\ -\sigma_j & \mathrm{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \mathrm{O} \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \mathrm{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_j \\ -\sigma_j & \mathrm{O} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \sigma_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるので，

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \qquad \text{つまり} \qquad \Sigma_i \equiv \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \sigma_i \end{pmatrix}$$

と置いて，$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \psi^\dagger(-i\nabla)\psi$ を思い出せば

$$\boldsymbol{J} = \int d^3\boldsymbol{x}\ :\psi^\dagger(x)\Big[\boldsymbol{x}\times(-i\nabla) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\Big]\psi(x): \tag{IV.49}$$

が得られる.

上式 $\boldsymbol{J}$ の右辺において，$\psi^\dagger$ と ψ に挟まれた演算子の第１項・第２項は既に非相対論的量子力学にも現れていた軌道角運動量演算子とスピン角運動量演算子である（正確には，後者はその４成分への拡張）．従って，確かに $\boldsymbol{J}$ は全角運動量を与えている．但し，ネータの定理が述べることは，第１項・第２項それぞれが個別に保存されるのではなく，その和 $\boldsymbol{J}$ だけが保存量となるということである．だから，スピン情報を抜き出すために第２項だけを抜き出して調べることは適切とは言えない．

しかしながらヘリシティに焦点を絞れば話は別である．この量は全角運動量が保存されれば自動的に保存量となる．事実，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ と書けば $\boldsymbol{pL}=0$ より $\boldsymbol{pJ}=\boldsymbol{pS}$，つまり「$\boldsymbol{J}$ の保存」＝「ヘリシティの保存」であることが理解できるだろう．そこで，$\boldsymbol{S}=\int d^3\boldsymbol{x}\ :\psi^\dagger(x)(\boldsymbol{\Sigma}/2)\psi(x):$ から出発し，s としてヘリシティを選んだ生成消滅演算子を用いて全体系のヘリシティ演算子を構成してみよう．

まずこの $\boldsymbol{S}$ に ψ の平面波展開を代入する：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \int d^3\boldsymbol{x}\ :\psi^\dagger(x)(\boldsymbol{\Sigma}/2)\psi(x): \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\sum_{\sigma,\rho}:\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}+d(\boldsymbol{k},\sigma)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}\Big] \\
&\qquad\qquad \times(\boldsymbol{\Sigma}/2)\Big[c(\boldsymbol{q},\rho)u(\boldsymbol{q},\rho)e^{-iqx}+d^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)v(\boldsymbol{q},\rho)e^{iqx}\Big]: \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\int d^3\boldsymbol{x}\sum_{\sigma,\rho}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{q},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)u(\boldsymbol{q},\rho)e^{i(k-q)x} \\
&\qquad + c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)v(\boldsymbol{q},\rho)e^{i(k+q)x} \\
&\qquad + d(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{q},\rho)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)u(\boldsymbol{q},\rho)e^{-i(k+q)x} \\
&\qquad - d^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)d(\boldsymbol{k},\sigma)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)v(\boldsymbol{q},\rho)e^{-i(k-q)x}\Big]
\end{aligned}
$$

（$\boldsymbol{x}$ 積分と $\boldsymbol{q}$ 積分を実行）

$$
= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2k^0}\sum_{\sigma,\rho}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)u(\boldsymbol{k},\rho)
$$

$$+ c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(-\boldsymbol{k},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)v(-\boldsymbol{k},\rho)e^{2ik^0x^0}$$
$$+ d(\boldsymbol{k},\sigma)c(-\boldsymbol{k},\rho)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)u(-\boldsymbol{k},\rho)e^{-2ik^0x^0}$$
$$- d^\dagger(\boldsymbol{k},\rho)d(\boldsymbol{k},\sigma)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)(\boldsymbol{\Sigma}/2)v(\boldsymbol{k},\rho)\Big] \tag{IV.50}$$

スピン演算子 $\boldsymbol{S}$ のみを扱う限り，式はこれ以上簡単にはならない．ここには c, d に関して非対角的な項もあり，時間依存性も残っている．従って，確かにスピン角運動量は単独では保存量になっていない．

運動量が $\boldsymbol{p}$ の粒子のヘリシティは $\boldsymbol{p\Sigma}/|\boldsymbol{p}|$ で与えられるので，求めるヘリシティ演算子 S_h は，上式において被積分関数（の 2 倍）と $\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ の内積をとることにより与えられる：

$$S_h = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2k^0}\sum_{\sigma,\rho}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)\Sigma_{\boldsymbol{k}}u(\boldsymbol{k},\rho)$$
$$+ c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d^\dagger(-\boldsymbol{k},\rho)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)\Sigma_{\boldsymbol{k}}v(-\boldsymbol{k},\rho)e^{2ik^0x^0}$$
$$+ d(\boldsymbol{k},\sigma)c(-\boldsymbol{k},\rho)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)\Sigma_{\boldsymbol{k}}u(-\boldsymbol{k},\rho)e^{-2ik^0x^0}$$
$$- d^\dagger(\boldsymbol{k},\rho)d(\boldsymbol{k},\sigma)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)\Sigma_{\boldsymbol{k}}v(\boldsymbol{k},\rho)\Big]$$

但し，ここで $\Sigma_{\boldsymbol{p}} \equiv \boldsymbol{p\Sigma}/|\boldsymbol{p}|$ と置いている．すると，(IV.14，IV.17) より

$$\Sigma_{\boldsymbol{p}}u(\boldsymbol{p},s) = +su(\boldsymbol{p},s), \quad \Sigma_{\boldsymbol{p}}v(\boldsymbol{p},s) = -sv(\boldsymbol{p},s)$$

となるので，u と v の規格直交関係（IV.20）も用いて

$$S_h = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=\pm1}\sigma\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\sigma) + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d(\boldsymbol{k},\sigma)\Big] \tag{IV.51}$$

に達する．これを見れば，確かに $c^{(\dagger)}$，$d^{(\dagger)}$ 共にスピン量子数が 1（1/2 の 2 倍）の粒子の生成消滅演算子を表すことがわかる．

以上の計算を参考にすれば，$\boldsymbol{J}$ の言葉でスピンを調べることもできる．すなわち，z 軸方向の運動量 $p^\mu = (p^0, 0, 0, |\boldsymbol{p}|)$ を持つ 1 粒子状態 $c^\dagger|0\rangle$，$d^\dagger|0\rangle$ に生

成消滅演算子で表した $J_z\,(=J^3)$ を作用させると，

$$J_z\, c^\dagger(\boldsymbol{p},\pm 1)|0\rangle = \pm\frac{1}{2}c^\dagger(\boldsymbol{p},\pm 1)|0\rangle, \quad J_z\, d^\dagger(\boldsymbol{p},\pm 1)|0\rangle = \pm\frac{1}{2}d^\dagger(\boldsymbol{p},\pm 1)|0\rangle \quad \text{(IV.52)}$$

という関係が得られるが，ここでは $p_x = p_y = 0$ となるように z 軸を選んでいるので，J_z 固有値への軌道角運動量の寄与はない．従って，これからも，$c^\dagger$, $d^\dagger$ は大きさ 1/2 のスピンを持つ粒子の生成演算子となっていることが理解できるという訳である．

問題 IV.14　(IV.52) 式の関係が成立することを確かめよ．

電荷演算子

ディラック場の場合は，位相変換に対するネータカレント

$$\theta^\mu(x) = -i\sum_a q_a :\Big[\,\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a(x))}u_a(x) - \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_a^*(x))}u_a^*(x)\,\Big]:$$

の空間成分は

$$\boldsymbol{j}(x) = q :\bar{\psi}(x)\boldsymbol{\gamma}\psi(x): \quad \text{(IV.53)}$$

（但し $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$ と表した）となるが，この右辺は $q:\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi:$ と書き直せる．これはディラック方程式における確率流密度（I.12）に q を掛けたものに一致している．従って，これは，複素スカラー場の $\boldsymbol{j}$ と同じく電荷 q の粒子からなる電磁カレント（密度）と解釈でき，θ^0 の空間積分

$$Q = -i\int d^3\boldsymbol{x}\sum_a q_a :[\,\pi_a(x)u_a(x) - \pi_a^*(x)u_a^*(x)\,]:$$

をディラック場に対して書き表した

$$Q = q\int d^3\boldsymbol{x}\ :\psi^\dagger(x)\psi(x): \quad \text{(IV.54)}$$

は電荷演算子となる．これを生成消滅演算子で表現すると

$$Q = q\int d^3\boldsymbol{x}\ :\psi^\dagger(x)\psi(x):$$

$$= q\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\sum_{\sigma,\rho} :\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx} + d(\boldsymbol{k},\sigma)v^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}\Big]$$
$$\times\Big[c(\boldsymbol{q},\rho)u(\boldsymbol{q},\rho)e^{-iqx} + d^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)v(\boldsymbol{q},\rho)e^{iqx}\Big]:$$

（この後の計算はハミルトニアンの場合とほぼ同じ）

$$= q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=\pm1}\Big[c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)c(\boldsymbol{k},\sigma) - d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)d(\boldsymbol{k},\sigma)\Big] \tag{IV.55}$$

となる．これはまた個数演算子を用いて

$$Q = q(N_c - N_d) \tag{IV.56}$$

とも表現できる．従って，$c^\dagger$，$d^\dagger$ はそれぞれ $+q$，$-q$ の電荷を持った粒子の生成演算子となっていることがわかる．実際，運動量やスピンの場合と全く同様の計算により

$$Q\,c^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle = +q\,c^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle\,,$$
$$Q\,d^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle = -q\,d^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle \tag{IV.57}$$

であることを容易に示すことができる．$c^\dagger$，$d^\dagger$ の生成する粒子が同じスピンと質量を持ち電荷のみ逆符号ということは，$d^\dagger$ は $c^\dagger$ が生む粒子の反粒子を生成する演算子であることを意味している．

問題 IV.15　電荷演算子 Q に関して（IV.57）式が成立することを確認せよ．

IV.5 生成消滅演算子のローレンツ及びC·P·T変換性

ローレンツ変換

スカラー場の場合と同様に，生成消滅演算子のローレンツ変換性を調べよう．話の進め方は，基本的にはスカラー場と同じだが，ディラック場の場合はスピン量子数も関与するので少々注意深い考察が必要となる．すなわち，厳密な言

い方をすれば，これはポアンカレ群（Poincaré group）の表現とウィグナー回転（Wigner rotation）というテーマに関係する問題である（例えば文献 [7] 参照）．ただ，その詳細にはここでは立ち入らず，他の問題と同様に基本的な構成に焦点を絞ることとする．

まず，古典場の変換性

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

から得られる量子場の関係

$$U(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda)^{-1} = S(\Lambda)^{-1}\psi(x') \tag{IV.58}$$

の両辺に ψ の平面波展開を代入する：

$$\begin{aligned}\text{左辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\ \sum_\sigma \Big[\ & U(\Lambda)c(\boldsymbol{k},\sigma)U(\Lambda)^{-1}u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx} \\ & + U(\Lambda)d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)U(\Lambda)^{-1}v(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\ \Big] \\ \text{右辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\ \sum_\sigma \Big[\ & c(\boldsymbol{k},\sigma)S(\Lambda)^{-1}u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx'} + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)S(\Lambda)^{-1}v(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx'}\ \Big]\end{aligned}$$

これから生成消滅演算子の変換性を決めるためには，まず右辺の $S^{-1}u$ と $S^{-1}v$ を左辺と直接比較できる形にしなければならない．

そこで，この二つの量がどんな方程式に従うのかを調べるため（IV.9）式に左から S^{-1} を作用させてみる：

$$S(\Lambda)^{-1}(\,\gamma^\mu p_\mu - m\,)u(\boldsymbol{p},s) = 0, \quad S(\Lambda)^{-1}(\,\gamma^\mu p_\mu + m\,)v(\boldsymbol{p},s) = 0$$

この二つの方程式は

$$\Big[S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)p_\mu - m\Big]S(\Lambda)^{-1}u(\boldsymbol{p},s) = 0$$

$$\Big[S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)p_\mu + m\Big]S(\Lambda)^{-1}v(\boldsymbol{p},s) = 0$$

と書き換えられ，この中の $S^{-1}\gamma^\mu S$ は（I.21）式

$$\gamma^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda)$$

より

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{IV.59}$$

と書き直せる．ここで共変・反変ベクトルの変換性を思い出せば

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu p_\mu = \gamma^\nu (\bar{\Lambda}^{-1})_\nu{}^\mu p_\mu = \gamma^\nu (\Lambda^{-1}p)_\nu$$

となるので，[♯IV.5] 結局 $S^{-1}u$，$S^{-1}v$ の満たす方程式は

$$\begin{aligned} \Big[\gamma^\mu(\Lambda^{-1}p)_\mu - m\Big] S(\Lambda)^{-1}u(\boldsymbol{p},s) &= 0\,, \\ \Big[\gamma^\mu(\Lambda^{-1}p)_\mu + m\Big] S(\Lambda)^{-1}v(\boldsymbol{p},s) &= 0 \end{aligned} \tag{IV.60}$$

となる．つまり，両者は運動量 $\Lambda^{-1}p$ のスピノルとして振る舞うことになる．従って，$S^{-1}u$，$S^{-1}v$ はそれぞれ $u(\Lambda^{-1}\boldsymbol{p},\pm1)$，$v(\Lambda^{-1}\boldsymbol{p},\pm1)$ の線形結合として

$$S(\Lambda)^{-1}u(\boldsymbol{p},s) = \sum_\sigma \mathcal{D}^u_{s\sigma} u(\Lambda^{-1}\boldsymbol{p},\sigma), \quad S(\Lambda)^{-1}v(\boldsymbol{p},s) = \sum_\sigma \mathcal{D}^v_{s\sigma} v(\Lambda^{-1}\boldsymbol{p},\sigma) \tag{IV.61}$$

と書ける（実際には u，v の関係により係数 $\mathcal{D}^u$ と $\mathcal{D}^v$ も関係づけられるが，ここではこのように簡単に記しておく）.[♯IV.6]

これを始めに戻って

$$\text{右辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\sigma \Big[\, c(\boldsymbol{k},\sigma)S(\Lambda)^{-1}u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx'} + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)S(\Lambda)^{-1}v(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx'}\,\Big]$$

の中に代入すると

$$\begin{aligned} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\sigma \Big[\, & c(\boldsymbol{k},\sigma)\sum_\rho \mathcal{D}^u_{\sigma\rho} u(\Lambda^{-1}\boldsymbol{k},\rho)e^{-ikx'} \\ & + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)\sum_\rho \mathcal{D}^v_{\sigma\rho} v(\Lambda^{-1}\boldsymbol{k},\rho)e^{ikx'}\,\Big] \end{aligned}$$

[♯IV.5] $\bar{\Lambda}p = \Lambda p$ であることに注意しよう（v 頁の記法参照）．

[♯IV.6] 行列 $\mathcal{D}$ が冒頭で述べた「ウィグナー回転」と呼ばれる量に相当するが，だからと言ってこの式を特別に難しく考える必要はない．要するに $S^{-1}u(\boldsymbol{p},s)$，$S^{-1}v(\boldsymbol{p},s)$ を完全系の $u(\Lambda^{-1}\boldsymbol{p},\pm1)$，$v(\Lambda^{-1}\boldsymbol{p},\pm1)$ でそれぞれ展開したということである．

となる．そこで，III.8 節と同じように積分変数を $k \to k' = \Lambda k$ と替えると

$$= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma,\rho} \Big[c(\Lambda \boldsymbol{k},\sigma)\mathcal{D}^u_{\sigma\rho} u(\boldsymbol{k},\rho) e^{-ikx} + d^\dagger(\Lambda \boldsymbol{k},\sigma)\mathcal{D}^v_{\sigma\rho} v(\boldsymbol{k},\rho) e^{ikx} \Big]$$

$$= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\rho} \Big[\sum_{\sigma} \mathcal{D}^u_{\sigma\rho} c(\Lambda \boldsymbol{k},\sigma) u(\boldsymbol{k},\rho) e^{-ikx} + \sum_{\sigma} \mathcal{D}^v_{\sigma\rho} d^\dagger(\Lambda \boldsymbol{k},\sigma) v(\boldsymbol{k},\rho) e^{ikx} \Big]$$

（スピン添字 σ と ρ を書き換えて）

$$= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma} \Big[\sum_{\rho} \mathcal{D}^u_{\rho\sigma} c(\Lambda \boldsymbol{k},\rho) u(\boldsymbol{k},\sigma) e^{-ikx} + \sum_{\rho} \mathcal{D}^v_{\rho\sigma} d^\dagger(\Lambda \boldsymbol{k},\rho) v(\boldsymbol{k},\sigma) e^{ikx} \Big]$$

これを左辺と比較して

$$\begin{aligned} U(\Lambda)c(\boldsymbol{p},s)U(\Lambda)^{-1} &= \sum_{\sigma} \mathcal{D}^u_{\sigma s} c(\Lambda \boldsymbol{p},\sigma)\,, \\ U(\Lambda)d(\boldsymbol{p},s)U(\Lambda)^{-1} &= \sum_{\sigma} \mathcal{D}^{v*}_{\sigma s} d(\Lambda \boldsymbol{p},\sigma) \end{aligned} \tag{IV.62}$$

を得る．これより，例えば粒子 c が 1 個存在する状態 $|\boldsymbol{p},s\rangle$ は

$$|\boldsymbol{p},s\rangle \quad \to \quad U(\Lambda)|\boldsymbol{p},s\rangle = \sum_{\sigma} \mathcal{D}^{u*}_{\sigma s} |\Lambda \boldsymbol{p},\sigma\rangle \tag{IV.63}$$

という変換を受けることになる．

$\mathcal{D}^{u,v}$ の具体的な中身はもちろん個々の変換に依存する．いずれにせよ c，d の変換性は単純な形ではないが，スピン量子数が変わらないような場合，例えば s としてヘリシティを用いている場合（このときは運動量の向きが逆転しないようなローレンツ変換なら s は不変），にはスピノルおよび生成消滅演算子の変換性は $\mathcal{D}^{u,v} = 1$ となるため簡単な形になる．

C変換

第 I 章で調べたように（18 頁），波動関数 $\psi(x)$ に対して $\psi'(x) = i\gamma^2\psi^*(x)$ は反粒子を記述する波動関数であった．この関係は，一般公式

$$\langle \Phi'|\phi(x')|\Phi'\rangle = D(\Lambda)\langle \Phi|\phi(x)|\Phi\rangle$$

がこの場合には

$$\langle \mathcal{C}\Phi|\psi_i(x)|\mathcal{C}\Phi\rangle = i\sum_j \gamma^2_{ij}\langle \Phi|\psi_j(x)|\Phi\rangle^* = i\sum_j \gamma^2_{ij}\langle \Phi|\psi^\dagger_j(x)|\Phi\rangle$$

となることより，量子場の関係 $\mathcal{C}^{-1}\psi\mathcal{C} = i\gamma^2\psi^{\dagger t}$ 或いは

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^t(x) \tag{IV.64}$$

$(C = i\gamma^2\gamma^0)$ という本書における標準形に書き直せる．

生成消滅演算子については，上の関係に ψ の平面波展開を代入し，u-スピノルと v-スピノルの関係（IV.11）

$$v(\boldsymbol{p}, s) = C\bar{u}^t(\boldsymbol{p}, s), \quad u(\boldsymbol{p}, s) = C\bar{v}^t(\boldsymbol{p}, s)$$

を思い出そう．すると，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} \\
&\quad = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm1} [\, \mathcal{C}c(\boldsymbol{k}, \sigma)\mathcal{C}^{-1}u(\boldsymbol{k}, \sigma)e^{-ikx} + \mathcal{C}d^\dagger(\boldsymbol{k}, \sigma)\mathcal{C}^{-1}v(\boldsymbol{k}, \sigma)e^{ikx} \,] \\
&C\bar{\psi}^t(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm1} [\, c^\dagger(\boldsymbol{k}, \sigma)C\bar{u}^t(\boldsymbol{k}, \sigma)e^{ikx} + d(\boldsymbol{k}, \sigma)C\bar{v}^t(\boldsymbol{k}, \sigma)e^{-ikx} \,] \\
&\qquad\quad = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm1} [\, c^\dagger(\boldsymbol{k}, \sigma)v(\boldsymbol{k}, \sigma)e^{ikx} + d(\boldsymbol{k}, \sigma)u(\boldsymbol{k}, \sigma)e^{-ikx} \,]
\end{aligned}$$

となることより，両辺の $e^{\pm ikx}$ の係数を比較して以下の関係式を得る：

$$\mathcal{C}c(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{C}^{-1} = d(\boldsymbol{p}, s), \ \ \mathcal{C}d(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{C}^{-1} = c(\boldsymbol{p}, s) \tag{IV.65}$$

P変換

まず，古典場 $\psi(x)$ のP変換を調べよう．空間反転 $x^\mu \to x'^\mu = \tilde{x}^\mu = (x^0, -\boldsymbol{x})$ された世界でのディラック方程式は，変換された波動関数を $\psi'(x') = P\psi(x)$ として

$$(i\gamma^\mu\tilde{\partial}_\mu - m)\psi'(x') = 0$$

である．この両辺に左から γ^0 を掛けると $\gamma^0\gamma^{1,2,3} = -\gamma^{1,2,3}\gamma^0$ より

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\gamma^0\psi'(x') = 0$$

となる．つまり，$\gamma^0\psi'(x')$ は変換前の波動関数と同じ方程式の解になっている．従って，$(\gamma^0)^2 = 1$ より

$$\psi'(x') = P\psi(x) = \gamma^0\psi(x) \tag{IV.66}$$

と決めることができる．

これよりC変換の場合と同様に，量子場 $\psi(x)$ に対して

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = P\psi(\tilde{x}) \tag{IV.67}$$

が導かれる．また，生成消滅演算子の変換性も上式に ψ の平面波展開を代入すれば求められるが，この場合は s がスピン z 成分（の2倍）なのかヘリシティなのかで結果が異なるので注意が必要である：

- s がスピン z 成分（の2倍）の場合

$u(\boldsymbol{p}, s)$，$v(\boldsymbol{p}, s)$ は（IV.10）式で与えられており，左から γ^0 が掛かると

$$\gamma^0 u(\boldsymbol{p}, s) = \sqrt{p^0 + m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \\ \dfrac{-\boldsymbol{p\sigma}}{p^0 + m}\chi_s \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 v(\boldsymbol{p}, s) = \sqrt{p^0 + m}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p\sigma}}{p^0 + m}\chi'_s \\ \\ -\chi'_s \end{pmatrix}$$

となる．この場合はスピン量子化軸は運動量 $\boldsymbol{p}$ の向きとは独立に設定されており，χ_s，χ'_s は常に（IV.21）で与えられているので

$$\gamma^0 u(\boldsymbol{p}, s) = u(-\boldsymbol{p}, s), \qquad \gamma^0 v(\boldsymbol{p}, s) = -v(-\boldsymbol{p}, s) \tag{IV.68}$$

となり，これより

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} \\ &\qquad = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} [\, \mathcal{P}c(\boldsymbol{k}, \sigma)\mathcal{P}^{-1} u(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{-ikx} + \mathcal{P}d^\dagger(\boldsymbol{k}, \sigma)\mathcal{P}^{-1} v(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{ikx} \,] \\ &P\psi(\tilde{x}) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} [\, c(\boldsymbol{k}, \sigma)\gamma^0 u(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{-ik\tilde{x}} + d^\dagger(\boldsymbol{k}, \sigma)\gamma^0 v(\boldsymbol{k}, \sigma) e^{ik\tilde{x}} \,] \\ &\qquad = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} [\, c(\boldsymbol{k}, \sigma) u(-\boldsymbol{k}, \sigma) e^{-ik\tilde{x}} - d^\dagger(\boldsymbol{k}, \sigma) u(-\boldsymbol{k}, \sigma) e^{ik\tilde{x}} \,] \end{aligned}$$

（積分変数を $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ と置き換えて）

$$= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm 1} [\, c(-\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx} - d^\dagger(-\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,]$$

を経て

$$\mathcal{P}c(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1} = c(-\boldsymbol{p},s), \quad \mathcal{P}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1} = -d(-\boldsymbol{p},s) \qquad (\text{IV}.69)$$

を得る．

● s がヘリシティの場合

この場合も $u(\boldsymbol{p},s)$，$v(\boldsymbol{p},s)$ に γ^0 を掛ける計算までは上と同じだが，今度はその右辺を同じ s をそのまま用いて $u(-\boldsymbol{p},s)$，$-v(-\boldsymbol{p},s)$ と書くことはできない．何故なら，s は（IV.14）に従って $\boldsymbol{n\sigma}$ $(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|)$ の固有値として，つまり $\boldsymbol{p}$ に依存して決められているからである．そこで $u(-\boldsymbol{p},s)$，$v(-\boldsymbol{p},s)$ を

$$u(-\boldsymbol{p},s) = \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_s \\ \dfrac{-\boldsymbol{p\sigma}}{p^0+m}\tilde{\chi}_s \end{pmatrix}, \quad v(-\boldsymbol{p},s) = \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{p\sigma}}{p^0+m}\tilde{\chi}'_s \\ \tilde{\chi}'_s \end{pmatrix}$$

と表してみよう．すると，$\tilde{\chi}_s$，$\tilde{\chi}'_s$ は

$$-\boldsymbol{n\sigma}\tilde{\chi}_s = s\tilde{\chi}_s, \quad -\boldsymbol{n\sigma}\tilde{\chi}'_s = -s\tilde{\chi}'_s$$

で決められることになるので，これを χ_s，χ'_s を決める方程式

$$\boldsymbol{n\sigma}\chi_s = s\chi_s, \quad \boldsymbol{n\sigma}\chi'_s = -s\chi'_s$$

と比較すると，

$$\tilde{\chi}_s = \chi_{-s}, \quad \tilde{\chi}'_s = \chi'_{-s}$$

であることがわかる．つまり，

$$\gamma^0 u(\boldsymbol{p},s) = u(-\boldsymbol{p},-s), \quad \gamma^0 v(\boldsymbol{p},s) = -v(-\boldsymbol{p},-s) \qquad (\text{IV}.70)$$

である．従って，

$$
\begin{aligned}
P\psi(\tilde{x}) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm1} [\, c(\boldsymbol{k},\sigma)\gamma^0 u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ik\tilde{x}} + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)\gamma^0 v(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ik\tilde{x}}\,] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm1} [\, c(\boldsymbol{k},\sigma)u(-\boldsymbol{k},-\sigma)e^{-ik\tilde{x}} - d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)u(-\boldsymbol{k},-\sigma)e^{ik\tilde{x}}\,]
\end{aligned}
$$

（積分・スピン和の中で $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$, $\sigma \to -\sigma$ と置き換えて）

$$
= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm1} [\, c(-\boldsymbol{k},-\sigma)u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx} - d^\dagger(-\boldsymbol{k},-\sigma)u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,]
$$

より

$$
\mathcal{P}c(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1} = c(-\boldsymbol{p},-s), \quad \mathcal{P}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1} = -d(-\boldsymbol{p},-s) \tag{IV.71}
$$

を得る．

何故このような場合分けが必要なのかと言うと，空間反転でスピン自身は向きを変えないが（軸性ベクトル：Axial vector），運動量の向きの逆転に伴ってその運動量方向の成分であるヘリシティの符号は逆転するからである．以下でも運動量の符号が変わる場合は同様に注意しなければならない．

問題 IV.16　$\psi(x)$ の変換性に基づき $:\bar{\psi}\psi:$, $:\bar{\psi}\gamma_5\psi:$ が

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} :\bar{\psi}(x)\psi(x): \mathcal{P}^{-1} &= + :\bar{\psi}(\tilde{x})\psi(\tilde{x}): \\
\mathcal{P} :\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x): \mathcal{P}^{-1} &= - :\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma_5\psi(\tilde{x}):
\end{aligned}
$$

を満たすこと確かめよ．

以上の説明のように，P変換に対する演算子 c, d の振る舞いは s の意味に依存して少し変わるが，それが何であれ (IV.69), (IV.71) には重要な事実が含まれている．それは，どちらの式においても c と d の右辺の符号が互いに逆になっていることである．この相対符号は全体に掛かる位相因子の選び方などには無関係に決まるもので，ディラック粒子・反粒子は反対の内部偶奇性を持つことを示している．

T変換

P変換の場合と同じようにT変換 $x^\mu \to x'^\mu = -\tilde{x}^\mu = (-x^0, \boldsymbol{x})$ された波動関数を $\psi'(x') = T\psi(x)$ とすれば，これは

$$(-i\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu - m)\psi'(x') = 0$$

を満たさなければならない．この両辺に左から $\gamma^1\gamma^3$ を掛けると $\gamma^\mu\tilde{\partial}_\mu$ との順序交換の際に γ^1 と γ^3 の項の符号が変わる．従って，$\gamma^{0,1,3*} = \gamma^{0,1,3}$，$\gamma^{2*} = -\gamma^2$ に注意すれば，

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)^* \gamma^1\gamma^3\psi'(x') = 0$$

が得られる．つまり，$\gamma^1\gamma^3\psi'(x')$ は $\psi^*(x)$ と同じ方程式を満たす．そこで，$T^2 = 1$ となるように虚数単位 i を加えて

$$\psi'(x') = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(x) \tag{IV.72}$$

と決めよう．

量子場の変換性については

$$\langle \mathcal{T}\Phi|\psi(-\tilde{x})|\mathcal{T}\Phi\rangle = i\gamma^1\gamma^3\langle\Phi|\psi(x)|\Phi\rangle^*$$

より 左辺 $= \langle\Phi|\mathcal{T}^{-1}\psi(-\tilde{x})\mathcal{T}|\Phi\rangle^*$ に注意して $\mathcal{T}^{-1}\psi(-\tilde{x})\mathcal{T} = -i\gamma^1\gamma^3\psi(x)$ となり，更に $\mathcal{T}i = -i\mathcal{T}$ も用いて

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = T\psi(-\tilde{x}) \tag{IV.73}$$

$(T = i\gamma^1\gamma^3)$ に達する．生成消滅演算子の変換性は，P変換の場合と同じように s の意味に依存する．

- s がスピン z 成分（の2倍）の場合

$$\gamma^1\gamma^3 = \begin{pmatrix} O & \sigma_x \\ -\sigma_x & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & \sigma_z \\ -\sigma_z & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_y & O \\ O & i\sigma_y \end{pmatrix}$$

だから

$$\gamma^1\gamma^3 u(\boldsymbol{p},s)=\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} i\sigma_y\chi_s \\ \frac{i\sigma_y\boldsymbol{p\sigma}}{p^0+m}\chi_s \end{pmatrix},\ \gamma^1\gamma^3 v(\boldsymbol{p},s)=\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \frac{i\sigma_y\boldsymbol{p\sigma}}{p^0+m}\chi'_s \\ i\sigma_y\chi'_s \end{pmatrix}$$

ここで，まず

$$\sigma_y\boldsymbol{p\sigma}=\sigma_y\sum_i p_i\sigma_i=(-p_x\sigma_x+p_y\sigma_y-p_z\sigma_z)\sigma_y=-\boldsymbol{p\sigma}^*\sigma_y$$

であり，次に

$$i\sigma_y\chi_s=-s\chi_{-s},\qquad i\sigma_y\chi'_s=-s\chi'_{-s}$$

となることも容易に確かめられるので，この場合の χ，χ' は複素数を含まないことも考慮すれば

$$\gamma^1\gamma^3 u(\boldsymbol{p},s)=-su^*(-\boldsymbol{p},-s),\qquad \gamma^1\gamma^3 v(\boldsymbol{p},s)=-sv^*(-\boldsymbol{p},-s) \qquad \text{(IV.74)}$$

が得られる．これよりP変換の場合と同様に平面波展開の式を利用し，$\mathcal{T}$ が反線形演算子であることも考慮して

$$\mathcal{T}c(\boldsymbol{p},s)\mathcal{T}^{-1}=is\,c(-\boldsymbol{p},-s),\qquad \mathcal{T}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{T}^{-1}=-is\,d(-\boldsymbol{p},-s) \qquad \text{(IV.75)}$$

に到達する．$\boldsymbol{p}$ と s が共に符号を変えたということは，T変換が運動量・スピン両方の向きを逆転させる作用を持つことを意味している．

• s がヘリシティの場合

今度は $\gamma^1\gamma^3u(\boldsymbol{p},s)$ 及び $\gamma^1\gamma^3v(\boldsymbol{p},s)$ の中の $\boldsymbol{p\sigma}\chi_s$，$\boldsymbol{p\sigma}\chi'_s$ はそれぞれ $s|\boldsymbol{p}|\chi_s$，$-s|\boldsymbol{p}|\chi'_s$ となるので $i\sigma_y$ が直接 χ_s，χ'_s に掛かる．その結果は

$$i\sigma_y\chi_s=-s\chi^*_{-s},\qquad i\sigma_y\chi'_s=-s\chi'^*_{-s}$$

となり，これを用いれば（IV.70）の導出過程を参考に

$$\gamma^1\gamma^3 u(\boldsymbol{p},s)=-su^*(-\boldsymbol{p},s),\qquad \gamma^1\gamma^3 v(\boldsymbol{p},s)=-sv^*(-\boldsymbol{p},s) \qquad \text{(IV.76)}$$

というスピノルの関係に達する．これより

$$\mathcal{T}c(\boldsymbol{p},s)\mathcal{T}^{-1}=-is\,c(-\boldsymbol{p},s),\quad \mathcal{T}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{T}^{-1}=is\,d(-\boldsymbol{p},s) \tag{IV.77}$$

という関係を得る．運動量・スピン両方共に向きが反転するのだから，ヘリシティは不変となるが，正にそれを示す結果である．

問題 IV.17　スカラー場のT変換での計算に倣って（IV.75，IV.77）を導出せよ．

問題 IV.18　ψ のT変換性に基づき

$$\mathcal{T}:\bar{\psi}(x)\psi(x):\mathcal{T}^{-1}=+:\bar{\psi}(-\tilde{x})\psi(-\tilde{x}):$$
$$\mathcal{T}:\bar{\psi}(x)\,i\gamma_5\psi(x):\mathcal{T}^{-1}=-:\bar{\psi}(-\tilde{x})\,i\gamma_5\psi(-\tilde{x}):$$

を示せ（$\mathcal{T}$ の反線形性に注意）．

ここで上の問題に基づいて，スカラー場のT変換性への補足説明をしておこう．スカラー場とディラック場との結合形は $:\bar{\psi}\psi\phi:$ か $:\bar{\psi}i\gamma_5\psi\phi:$ であるが，P変換において調べた $:\bar{\psi}\psi:$，$:\bar{\psi}\gamma_5\psi:$ の変換性より，これらの相互作用のP不変性を仮定すれば前者に結合できるのはスカラー場，後者は擬スカラー場ということになる．従って，更にこれらの相互作用のT不変性も要請すれば，ϕ のT変換における符号が，スカラー場は $+$，擬スカラー場は $-$ と確定する．

IV.6 ディラック場の伝播関数

ディラック場の伝播関数は

$$S_{\mathrm{F}}(x-y)=i\langle 0|\mathrm{T}\,\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \tag{IV.78}$$

と定義される．ここで，反交換関係に従う量 $A(x)$，$B(y)$ の時間順序積は

$$\mathrm{T}[\,A(x)B(y)\,]=A(x)B(y)\theta(x^0-y^0)-B(y)A(x)\theta(y^0-x^0)$$

（右辺第2項の符号に注意）だが，(IV.78）の場合は更に4行4列の行列であることも忘れてはならない．つまり，誤解のないように書けば (a,b) 成分が

$$S_{\mathrm{F}ab}(x-y) = i\langle 0|\mathrm{T}\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle$$

ということである．

ディラック方程式を用いれば，この伝播関数は

$$(\,i\gamma^\mu\partial_\mu - m\,)S_{\mathrm{F}}(x) = -\delta^4(x) \tag{IV.79}$$

という関係を満たすことが確かめられる．つまり，スカラー場の場合と同じく S_{F} はディラック方程式を構成する演算子 $i\gamma^\mu\partial_\mu - m$ のグリーン関数として振る舞うのである．

問題 IV.19　ディラック場の伝播関数が（IV.79）を満たすことを示せ．

運動量表示

(IV.78）式の右辺の ψ，$\bar{\psi}$ に平面波展開 (IV.36) を代入して S_{F} の運動量表示を求めよう．但し，途中の式が不必要に複雑にならないよう $y=0$ と置いた表現を用いる（勿論これで一般性が失われることはない）．

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{F}ab}(x) &= i\langle 0|\mathrm{T}\psi_a(x)\bar{\psi}_b(0)|0\rangle \\
&= i\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(0)|0\rangle\theta(x^0) - i\langle 0|\bar{\psi}_b(0)\psi_a(x)|0\rangle\theta(-x^0) \\
&= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\sum_{\sigma,\rho}\langle 0|c(\boldsymbol{k},\sigma)c^\dagger(\boldsymbol{q},\rho)|0\rangle u_a(\boldsymbol{k},\sigma)\bar{u}_b(\boldsymbol{q},\rho)e^{-ikx}\theta(x^0) \\
&\quad - i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\sum_{\sigma,\rho}\langle 0|d(\boldsymbol{q},\rho)d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)|0\rangle v_a(\boldsymbol{k},\sigma)\bar{v}_b(\boldsymbol{q},\rho)e^{ikx}\theta(-x^0)
\end{aligned}$$

（ここで $\langle 0|cc^\dagger|0\rangle$, $\langle 0|dd^\dagger|0\rangle$ 以外は0になることに注意）

$$\begin{aligned}
&= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\sum_{\sigma,\rho}(2\pi)^3 2q^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\delta_{\sigma\rho}u_a(\boldsymbol{k},\sigma)\bar{u}_b(\boldsymbol{q},\rho)e^{-ikx}\theta(x^0) \\
&\quad - i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\sum_{\sigma,\rho}(2\pi)^3 2q^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\delta_{\sigma\rho}v_a(\boldsymbol{k},\sigma)\bar{v}_b(\boldsymbol{q},\rho)e^{ikx}\theta(-x^0)
\end{aligned}$$

$$= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\sigma=\pm 1}\Big[u_a(\boldsymbol{k},\sigma)\bar{u}_b(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}\theta(x^0) - v_a(\boldsymbol{k},\sigma)\bar{v}_b(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\theta(-x^0)\Big]$$

（射影演算子の公式（IV.33）を用いて）

$$= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\Big[\theta(x^0)(\gamma^\mu k_\mu + m)_{ab}e^{-ikx} - \theta(-x^0)(\gamma^\mu k_\mu - m)_{ab}e^{ikx}\Big]$$

$$= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\Big[\theta(x^0)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{ab}e^{-ikx} + \theta(-x^0)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{ab}e^{ikx}\Big]$$

$$= i(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{ab}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\Big[\theta(x^0)e^{-ikx} + \theta(-x^0)e^{ikx}\Big]$$

（スカラー場で得た（III.73）式を用いて）

$$= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{ab}\Delta_{\mathrm{F}}(x)$$

但し，下から 2 番目の等号で演算子 $(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)$ を積分の前に出した際には，その演算子が $\theta(x^0)$，$\theta(-x^0)$ に作用して生み出される 2 項が相殺することを用いた．

従って，スカラー場とディラック場の伝播関数の間には

$$S_{\mathrm{F}}(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_{\mathrm{F}}(x) \tag{IV.80}$$

という関係があることがわかり，

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

より任意の p に対して

$$S_{\mathrm{F}}(p) = \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \tag{IV.81}$$

を得る．但し，スカラー場伝播関数のところで述べた注意をここでも思い出そう：e^{-ikx} は運動方程式の解ではなく単なるフーリエ変換の核なので，4 元運動量 k の各成分の間に $k^2 = m^2$ のような関係はない．

また，上記の Δ_{F} と S_{F} の関係のお蔭で，(IV.79) 式も Δ_{F} の性質

$$(\Box + m^2)\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \delta^4(x)$$

を用いて

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S_{\mathrm{F}}(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_{\mathrm{F}}(x)$$
$$= (\underbrace{-\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2}_{-(\Box+m^2)})\Delta_{\mathrm{F}}(x) = -\delta^4(x)$$

と導くこともできる．

グリーン関数の方法

グリーン関数を用いた導出方法も眺めておこう：（IV.79）の関係式に

$$S_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx}\, S_{\mathrm{F}}(k), \quad \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx}$$

を代入して左辺と右辺を比較すれば $(\not{p} - m)S_{\mathrm{F}}(p) = -1$ という関係が得られる．この両辺に左から $(\not{p} + m)$ を掛ければ左辺は $(p^2 - m^2)S_{\mathrm{F}}(p)$ となり

$$S_{\mathrm{F}}(p) = \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2}$$

を得る．この分母に「$+i\varepsilon$ ルール」を適用することにより（IV.81）式

$$S_{\mathrm{F}}(p) = \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}$$

に達する．

なお，このディラック場伝播関数 S_{F} はしばしば

$$S_{\mathrm{F}}(p) = \frac{1}{m - \not{p} - i\varepsilon} \tag{IV.82}$$

と表される．これは，あたかも $(\not{p} - m)S_{\mathrm{F}} = -1$ の両辺を 4 次の行列 $(\not{p} - m)$ で直接割ったかのような式だが，実際は（IV.81）式の省略形である．

V. ベクトル場の理論

ベクトル場の量子化においては，その結果として出現する粒子が質量を持つか否かで異なる理論的な扱いが必要となる．但し，現在では，有質量ベクトル場についても，質量0の実ベクトル場から出発して「自発的対称性の破れ＋ヒッグス機構」という枠組により質量項をつくり出さない限り「くりこみ可能な理論」は構成できないことが知られている．従って，理屈としては，質量のない実ベクトル場の量子化がわかれば十分と言えなくもないが，ここでは実用的側面にも配慮し，電磁相互作用を媒介する電磁場（光子場）と強相互作用を媒介するグルオン場を記述する無質量の実ベクトル場，[♯V.1] 中性弱相互作用のZボソンを記述する有質量の実ベクトル場および荷電弱相互作用のWボソンを記述する有質量の複素ベクトル場それぞれについて，その古典論・量子論を解説していく．なお，無質量・実ベクトル場については電磁場を通じてその理論的整備が進められてきたので，「無質量ベクトル場」と「電磁場」をほぼ同義語として使うことにする．

V.1 無質量ベクトル場の古典論

ベクトル場とは，ローレンツ変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ の下で，この x^{μ} と同じ変換

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \tag{V.1}$$

を受ける場を意味する．この代表例はすでに古典物理学の中でも重要な地位にあった電磁場であろう．但し，厳密に言うなら，電磁場がベクトル場としての変換性を持つと結論するためには，スカラー場・ディラック場での議論と同じように，まずマクスウェル方程式に共変性の要求を行うことから話を始めない

[♯V.1] 電磁場とグルオン場の差は，後者がカラーという名の量子数を持っている点にあり，それ以外の基本的な性質においては違いはない．

といけないが，この方程式の共変性は古典物理学の段階から周知の事実なので，ここでは電磁場＝ベクトル場を前提にして古典電磁気学におけるその取り扱いについてまとめておく（12 頁脚注で与えた簡単な記述も参照のこと）．

真空中の自由電磁場 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ の振る舞いは，マクスウェル方程式

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\boldsymbol{E}(x)=0\,, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B}(x)-\partial\boldsymbol{E}(x)/\partial t=0\,,\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x)=0\,, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}(x)+\partial\boldsymbol{B}(x)/\partial t=0 \end{aligned} \tag{V.2}$$

（SI 単位系＋自然単位系）で記述される．これがローレンツ変換の下で形を変えない相対論的な方程式であることは上記の通りよく知られているが，このままの形ではその共変性は明白ではない．そこで，まず $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ を二つの電磁ポテンシャル ϕ（スカラーポテンシャル）と $\boldsymbol{A}$（ベクトルポテンシャル）を用いて書き表す：

$$\boldsymbol{E}(x)=-\operatorname{grad}\phi(x)-\partial\boldsymbol{A}(x)/\partial t, \qquad \boldsymbol{B}(x)=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(x) \tag{V.3}$$

これにより (V.2) の中の $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{B}/\partial t=0$ と $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ の二つは自動的に満たされる．

問題 V.1　(V.3) 式を代入することにより $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{B}/\partial t=0$ と $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ が成立することを示せ．

次に，電磁ポテンシャルが満たすべき方程式を求めるために，$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$ と $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}-\partial\boldsymbol{E}/\partial t=0$ に (V.3) を代入すると，前者からは

$$\operatorname{div}\left[\operatorname{grad}\phi(x)+\partial\boldsymbol{A}(x)/\partial t\right]=0$$

が，また後者からは

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{B}-\partial\boldsymbol{E}/\partial t &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})+\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}\phi+\partial\boldsymbol{A}/\partial t)\\ &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}(\partial\phi/\partial t)+\partial^2\boldsymbol{A}/\partial t^2\\ &= (\partial^2/\partial t^2-\Delta)\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}(\partial\phi/\partial t+\operatorname{div}\boldsymbol{A})=0 \end{aligned}$$

が得られる．ここで，二つの電磁ポテンシャル ϕ，$\boldsymbol{A}$ を一つの 4 元ベクトル A^μ にまとめよう：

$$A^\mu(x) = (A^0,\ A^1,\ A^2,\ A^3) = (\phi,\ \boldsymbol{A}) \tag{V.4}$$

すると，上の二式のうち前者は

$$\sum_{i=1}^{3} \partial_i(\partial_i\phi + \partial A^i/\partial t) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i(-\partial^i A^0 + \partial^0 A^i) = 0$$

と書け，さらに括弧内で $i=0$ と置けば $-\partial^0 A^0 + \partial^0 A^0 (=0)$ だから，空間成分に対する和は第 0 成分も含める形に書き直すことができる：

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) = 0$$

一方，後者は $\partial_\mu\partial^\mu (= \Box) = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$ と $\partial_\mu A^\mu = \partial\phi/\partial t + \operatorname{div}\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\partial_\mu\partial^\mu \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}(\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad \to \quad \partial_\mu(\partial^\mu A^i + \partial_i A^\mu) = \partial_\mu(\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu) = 0$$

のように変形できる．

従って，両者は

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \tag{V.5}$$

と置くことにより一つの方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{V.6}$$

にまとめられる．これがマクスウェル方程式の共変的表現であり，これを生み出すラグランジアン（密度）は

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \tag{V.7}$$

で与えられる．また，上式（V.5）で導入された $F^{\mu\nu}$ は**電磁場テンソル**と呼ばれ，電磁場の共変的な取り扱いにおいて重要な役割を果たす．もちろん電場・

磁場も (V.3) 式を通じて $F^{\mu\nu}$ の各成分と関係づけられる．それを行列的に表現すれば

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{V.8}$$

となる．

問題 V.2　実際に $F^{\mu\nu}$ の各成分を (V.3) 式と比較することにより (V.8) 式を確認せよ．

問題 V.3　上で与えたラグランジアン $\mathcal{L}$ からラグランジュ方程式を通じて $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ が導かれることを確認せよ．

ゲージ不変性

このように導入された共変形式のマクスウェル方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ は，その $F^{\mu\nu}$ の形 $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ から明らかなように，任意の微分可能なスカラー関数 χ を用いての

$$A^\mu(x) \quad \rightarrow \quad A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \tag{V.9}$$

という変換の下で不変である．この変換を**ゲージ変換**と呼び，方程式がこの変換に対して形を変えないことを方程式の**ゲージ不変性**あるいは**ゲージ対称性**という．

電磁ポテンシャルは 4 元ベクトルだから自由度は 4 のように思えるが，現実の電磁波は横波であってその自由度は 2 しかない．この差額（見かけの自由度）はゲージ変換を用いて消し去ることができる．まず，上記のスカラー関数 χ として特に変換前の電磁ポテンシャル A^μ と

$$\partial_\mu A^\mu(x) + \Box \chi(x) = 0$$

という関係にあるものを採ると，変換された電磁ポテンシャル A'^μ は

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = 0 \tag{V.10}$$

という関係を満たし，またこの結果マクスウェル方程式も

$$\Box A'^{\mu}(x) = 0 \tag{V.11}$$

と簡単な形になる．このようにして選びだされた電磁ポテンシャルを**ローレンツゲージ**（Lorenz gauge）の電磁ポテンシャル，その条件（V.10）を**ローレンツ条件**（Lorenz condition）と呼ぶ.[♯V.2] 但し，ローレンツ条件を課しても電磁ポテンシャルは完全に固定される訳ではない．$\Box\chi = 0$ を満たすような χ を用いるゲージ変換はローレンツ条件を壊すことはないので，まだ自由度は残っており，そのような制限されたゲージ変換で結ばれる A'^{μ} は全てローレンツゲージの電磁ポテンシャルとして同等である．そこで，この残ったゲージ変換の自由度を用いて例えば電磁ポテンシャルの第 0 成分を消すことができる．この結果，我々は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}' = 0$ を満たす電磁場，つまりは横波の 2 成分のみを持つ電磁場に到達するという訳である．

このように電磁場の物理的自由度は 2 であると確認できるが，実際にその成分のみを残して理論を構成すると明白な共変性が再び失われるので，本書では 4 元ベクトル A'^{μ} を電磁場として扱っていく．従って（V.11）式がローレンツゲージでの基本方程式である（以下では A'^{μ} を改めて A^{μ} と表す）．この方程式 $\Box A^{\mu} = 0$ は質量を持たないスカラー粒子 $\phi(x)$ が従うクライン-ゴルドン方程式

$$\Box\phi(x) = 0$$

と同じ形をしている．これは，電磁場を量子化した場合には質量 0 のベクトル粒子が登場することを示唆しているが，正にそれが**光子**（Photon）である．

無質量ベクトル場の平面波展開

$\Box A^{\mu} = 0$ から出発すれば，$\Box\phi = 0$ の場合と同じく $p^2 = 0$ を満たす運動量 p^{μ} を用いて A^{μ} を $e^{\pm ipx}$ で平面波展開することができる．但し，スカラー場と異な

♯V.2 ローレンスと記される場合もある（いずれにせよ，綴りは Lorentz ではないことに注意）．

り A は 4 成分のベクトルであるため，基底の役割を果たす四つの独立なベクトル（**偏極ベクトル**：Polarization vector）を導入しなければならない．運動量 $\boldsymbol{p}$ に対するその偏極ベクトルを $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$ と表そう（$\lambda=0,1,2,3$）．3 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ は三つの基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{x,y,z}$ を用いて $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$ と表せるが，これと同じように $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$ は 4 次元ミンコフスキー（Minkowski）時空における基本単位ベクトルということである．この結果，電磁場が実であることも考慮して

$$A^\mu(x)=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\kappa=0}^{3}\left[\,a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx}+a^*(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,\right] \tag{V.12}$$

（ここで $k^2=0$，つまり $k^0=|\boldsymbol{k}|$）を得る．

基底ベクトルは，互いに独立ならどのような成分でも構わない訳だが，実際には計算に便利な形に選ぶのが賢明であることは間違いない．ここでは通常の方法に従い，$\boldsymbol{p}$ の向きに z 軸をとった一つの基準系を設定し，そこにおいて各成分が

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0)&=(1,0,0,0), &\quad \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},1)&=(0,1,0,0),\\ \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},2)&=(0,0,1,0), &\quad \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},3)&=(0,0,0,1)\end{aligned} \tag{V.13}$$

となるように $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$ を決める．これより $\lambda=1,2$ は

$$p_\mu\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},1)=p_\mu\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},2)=0 \tag{V.14}$$

を満たす成分，すなわち**横波**（Transverse）成分を，$\lambda=3$ は**縦波**（Longitudinal）成分を表すことがわかる．また $\lambda=0$ を**スカラー成分**と呼ぶ．

上記の偏極ベクトルは次の条件を満たす：

$$\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda')=g^{\lambda\lambda'} \tag{V.15}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{3}g_{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{p},\lambda)=g^{\mu\nu} \tag{V.16}$$

前者は $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{p},0\sim3)$ の 4 次元的な規格直交関係，後者は任意の 4 元ベクトルが $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{p},0\sim3)$ で展開できるという完全性関係（Completeness relation）である

が，後者では λ はローレンツ変換性を表す4元ベクトルの添字ではないので $\sum$ 記号は省略できないことに注意しよう．

問題 V.4　(V.13) 式で与えられた4本の偏極ベクトルの間に (V.15, V.16) の関係があることをを確認せよ．

なお，$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},i)=(0,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},i))$ $(i=1\sim 3)$ と表すと $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$ は右手系を構成する．そこで，$\boldsymbol{p}\to -\boldsymbol{p}$ の場合にもこの関係が保たれるよう

$$\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},1)=-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},1),\quad \boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},2)=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2) \tag{V.17}$$

と決めておこう（$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$ は $\boldsymbol{p}$ の向きだから，明らかに $\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},3)=-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$）．

V.2 有質量ベクトル場の古典論

無質量スカラー場と有質量スカラー場が満たす運動方程式（クライン-ゴルドン方程式）は，それぞれ

$$\Box\phi(x)=0,\qquad (\Box+m^2)\phi(x)=0$$

である．これと同様に，質量を持つベクトル場 A^{μ} の運動方程式は

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}(x)+m^2A^{\nu}(x)=0 \tag{V.18}$$

（前節と同じく $F^{\mu\nu}\equiv\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}$）で与えられる．これは**プロカ方程式** (Proca equation) という名を持つ．この場合のラグランジアンは，$A^{\mu}(x)$ が実場なら

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)+\frac{1}{2}m^2A_{\mu}(x)A^{\mu}(x) \tag{V.19}$$

複素場なら

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{1}{2}F^{*}_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)+m^2A^{*}_{\mu}(x)A^{\mu}(x) \tag{V.20}$$

である．

プロカ方程式の両辺をさらに x^ν で微分し ν について和をとれば，$F^{\mu\nu}$ の反対称性より

$$m^2\partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

となるので，$m \neq 0$ である限り自動的にローレンツ条件が得られることになり，方程式は

$$(\Box + m^2)A^\mu(x) = 0 \tag{V.21}$$

という有質量スカラー場のクライン-ゴルドン方程式と同じ形になる．

有質量ベクトル場の平面波展開

運動方程式（V.21）より，A^μ の平面波展開が，実場の場合には

$$A^\mu(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3}[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} + a^*(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \tag{V.22}$$

複素場の場合には

$$A^\mu(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3}[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} + b^*(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \tag{V.23}$$

（但し，$k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$）と得られる．

ここで偏極ベクトルは，$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},3)$ の空間成分が粒子運動量 $\boldsymbol{p}$ の向きに一致し，静止系（$\boldsymbol{p}=0$）においてそれぞれの成分が

$$\begin{aligned} &\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0) = (1,0,0,0)\,(= p^\mu/m), \qquad &&\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},1) = (0,1,0,0), \\ &\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},2) = (0,0,1,0), &&\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},3) = (0,0,0,1) \end{aligned} \tag{V.24}$$

となるように選ぼう．$\boldsymbol{p} \neq 0$ の系での形はローレンツ変換により得られるが，

$$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0) = p^\mu/m, \qquad p_\mu\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda=1,2,3) = 0 \tag{V.25}$$

という関係は不変である．特に，各軸が静止系のそれと平行で $\boldsymbol{p}$ が z 軸正の向きに一致するような系においては，$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$ の各成分は次のようになる：

$$\begin{aligned} &\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0) = (p^0,0,0,|\boldsymbol{p}|)/m\,, \qquad &&\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},1) = (0,1,0,0), \\ &\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},2) = (0,0,1,0), &&\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},3) = (|\boldsymbol{p}|,0,0,p^0)/m \end{aligned} \tag{V.26}$$

これらの偏極ベクトルも（V.15，V.16）と同じ条件を満たしていることは容易に確認できる：

$$\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda')=g^{\lambda\lambda'},\qquad \sum_{\lambda=0}^{3}g_{\lambda\lambda}\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\boldsymbol{p},\lambda)=g_{\mu\nu}$$

V.3 無質量ベクトル場の量子化と演算子

正準量子化の手法に基づいて電磁場，すなわち質量項のない実ベクトル場，を量子化する場合，ラグランジアン（密度）

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$$

から出発し，あとは半ば機械的に A^μ に共役な一般化運動量を

$$\pi_\mu(x)=\partial\mathcal{L}(x)/\partial\dot{A}^\mu(x)=F_{\mu0}(x)$$

と導入し正準交換関係の設定へと進んでいけばいいように思われるが，実は少々厄介な問題が存在する．この手続きにおいては π_μ と A^μ の間に 0 でない交換関係が要求されるが，π_μ の第 0 成分は

$$\pi_0(x)=F_{00}(x)=0$$

となってしまうために $[\pi_0(x),\,A^0(x')]\neq 0$ とはなり得ないという訳である．この困難の出処は $F_{00}=0$ だが，それはゲージ不変性を保証する電磁場テンソルの形 $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ から生まれている．つまりはゲージ不変性がその起源である．

また，マクスウェル方程式自体にも次のような見逃せない問題が生じる：$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$ を A^μ で表せば $(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu=0$ であるが，これは相互作用 j_μ の下では一般に

$$(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu(x)=j_\mu(x)$$

という形になる．従って，この解は

$$(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\mathcal{G}^{\nu\sigma}(x) = \delta_\mu^\sigma\,\delta^4(x)$$

を満たす関数 $\mathcal{G}^{\mu\nu}$（グリーン関数）を用いて

$$A^\mu(x) = \int d^4y\,\mathcal{G}^{\mu\nu}(x-y)j_\nu(y)$$

と与えられるはずなのだが，上記の $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ の定義式の両辺に ∂^μ を作用させると

$$\text{左辺} = \partial^\mu(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\mathcal{G}^{\nu\sigma}(x) = (\partial_\nu\Box - \partial_\nu\Box)\mathcal{G}^{\nu\sigma}(x) = 0$$
$$\text{右辺} = \delta_\mu^\sigma\partial^\mu\delta^4(x) = \partial^\sigma\delta^4(x) \neq 0$$

となり，グリーン関数が存在できないという結論に至るのである．この問題もやはり演算子 $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu$ が A^ν のゲージ変換項 $\partial^\nu\chi$ に作用すると 0 になる，つまりゲージ不変性を保つ形をしているということから生じている．

ゲージ固定

上述の問題を回避する一手段は，V.1 で説明したゲージ変換の手順に従い A^0 を消去し，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$ を満たす物理的な横波 2 成分に場を絞って量子化を実行することである．これはクーロン（Coulomb）ゲージでの量子化という呼び名で知られている．しかし，V.1 でも述べたことだが，そのように成分を減らすと理論体系から明白な共変性が失われてしまう．

そこで考えられる別の手段は，**ゲージ固定項**（Gauge fixing term）と呼ばれる項をラグランジアンに加えることにより，ゲージ変換の自由度を凍結してしまうことである．[♯V.3] ゲージ固定項は，この目的にかなうものなら理論的にはどんな形でもいい訳だが，よく用いられる標準的な形は α を任意定数として

$$-\frac{1}{2\alpha}[\,\partial_\mu A^\mu(x)\,]^2$$

[♯V.3] 但し，これは人為的な操作であり，それが物理的計算の最終結果に影響を与えるようなことがあっては出来上がった量子論も論理的に整合性のある体系とは呼べない．

というものである．つまり，(V.7) 式ではなく，ラグランジアン

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\alpha}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2 \tag{V.27}$$

を量子化の出発点とするのである．すると，マクスウェル方程式は

$$(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu(x) + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu A^\nu(x) = 0 \tag{V.28}$$

となり，また A^μ に共役な一般化運動量は

$$\pi_\mu(x) = F_{\mu 0}(x) - \frac{1}{\alpha}g_{\mu 0}[\partial_\nu A^\nu(x)] \tag{V.29}$$

となる．

問題 V.5　マクスウェル方程式および一般化運動量が上記の形になることを確かめよ．

量子化

これで準備は完了した．正準量子化の規則に従い，π_μ と A^μ の間に

$$[\pi_\mu(x),\ A^\nu(x')] = -i\delta_\mu^\nu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

（$x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$，$x'^\mu = (t, \boldsymbol{x}')$）という同時刻の交換関係を課そう．これは，$\delta_\mu^\nu = g_\mu{}^\nu$ に注意すれば，反変成分（または共変成分）同士の関係に容易に書き直すことができる：

$$[\pi^\mu(x),\ A^\nu(x')] = -ig^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{V.30}$$

これに

$$[\pi^\mu(x),\ \pi^\nu(x')] = [A^\mu(x),\ A^\nu(x')] = 0 \tag{V.31}$$

を加えて電磁場量子化の正準交換関係が構成される．

さて，量子化が内部矛盾なく行われるかどうかを見るためには，任意定数 α を残したまま様々な物理量（観測可能量）を計算し，確かに α 依存性がないと

いうことを示さなければならないが，以下では実用的観点から運動方程式（マクスウェル方程式）が最も簡単な形になるように $\alpha = 1$ と選ぶことにする．このように固定されたゲージを**ファインマンゲージ**と呼ぶ．このとき運動方程式は（V.28）で $\alpha = 1$ と置いて

$$\Box A^\mu(x) = 0 \tag{V.32}$$

となる．これはローレンツゲージでの古典場の方程式と同じ形なので，以下でも運動量展開（V.12）が利用できることになる．また，$\pi^\mu = F^{\mu 0} - g^{\mu 0}[\,\partial_\nu A^\nu\,]$ を時間・空間成分に分けて書いた関係

$$\pi^0(x) = -\dot{A}^0(x) - \sum_j \partial_j A^j(x), \qquad \pi^i(x) = \partial^i A^0(x) - \dot{A}^i(x)$$

を用いることにより，正準交換関係を A^μ とその時間微分の関係として表すことができる：

$$\begin{aligned} [\,A^\mu(x),\, \dot{A}^\nu(x')\,] &= -ig^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\,, \\ [\,A^\mu(x),\, A^\nu(x')\,] &= [\,\dot{A}^\mu(x),\, \dot{A}^\nu(x')\,] = 0 \end{aligned} \tag{V.33}$$

問題 V.6　上の交換関係を導出せよ（時間成分・空間成分に分けて計算する）．

実は，始めからファインマンゲージで計算を進める場合は，上記の交換関係ももっと簡単に導き出せる．つまり，その場合のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}[\,\partial_\mu A^\mu(x)\,]^2 \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu[\,A_\nu(x)\partial^\nu A^\mu(x) - A^\mu(x)\partial_\nu A^\nu(x)\,] \end{aligned}$$

と変形でき，右辺第 2 項は運動方程式には寄与しない発散項として除くことができるため

$$\pi_\mu(x) = \partial\mathcal{L}(x)/\partial\dot{A}^\mu(x) = -\dot{A}_\mu(x)$$

となるからである．以下の計算でもこの簡単な形を用いることにする．

この正準量子化により，電磁場の平面波展開（V.12）

$$A^{\mu}(x)=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\kappa=0}^{3}[\,a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,]$$

における係数 $a(\boldsymbol{p},\lambda)$，$a^*(\boldsymbol{p},\lambda)$ もそれぞれ演算子 $a(\boldsymbol{p},\lambda)$，$a^{\dagger}(\boldsymbol{p},\lambda)$ となり，

$$\begin{aligned}&[\,a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p}',\lambda')\,]=-(2\pi)^3 2p^0 g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\\&[\,a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a(\boldsymbol{p}',\lambda')\,]=[\,a^{\dagger}(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p}',\lambda')\,]=0\end{aligned}\qquad\text{(V.34)}$$

という関係を満たすことになる：

$$A^{\mu}(x)=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\kappa=0}^{3}[\,a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,]\qquad\text{(V.35)}$$

問題 V.7　交換関係（V.34）を用いて A_{μ}，$\dot{A}_{\nu}$ が（V.33）の関係を満たすことを示せ．その際（V.16）の完全性関係に注意せよ．

生成消滅演算子

これでようやく量子化が完了した．スカラー場・ディラック場の理論構成を基に考えれば，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda)$ が「質量 0 のベクトル粒子（＝光子）の生成消滅演算子」として働くことは容易に予想できるだろう．しかしながら，電磁場の場合は以下で説明するように，まだ複雑な問題が残っている．

(V.34) の第 1 式は，$\lambda,\lambda'=1,2,3$ なら $g^{\lambda\lambda'}=-\delta^{\lambda\lambda'}$ なので

$$[\,a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p}',\lambda')\,]=(2\pi)^3 2p^0\delta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$

と書けてスカラー場と同じ交換関係になるが，$\lambda=\lambda'=0$ の場合は

$$[\,a(\boldsymbol{p},0),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p}',0)\,]=-(2\pi)^3 2p^0\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$

となって右辺の符号が逆転してしまう．このため，個数演算子は

$$N=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\kappa=0}^{3}a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa)$$

ではなく，第0成分（スカラー成分）の項については，その符号を $-$ とする必要がある：

$$N=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\sum_{\kappa=1}^{3}a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa)-a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\,] \qquad \text{(V.36)}$$

それでもこの点に目をつぶれば，実際に N が個数演算子，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda)$ が生成消滅演算子としての機能を持つこと，例えば $N_0\equiv-\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)$ と置けば

$$N_0a^\dagger(\boldsymbol{p},0)|0\rangle=a^\dagger(\boldsymbol{p},0)|0\rangle,\quad N_0a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,0)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2,0)|0\rangle=2a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,0)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2,0)|0\rangle$$

となること，或いは $N_0|\Psi\rangle=n|\Psi\rangle$ の場合に

$$N_0a^\dagger(\boldsymbol{p},0)|\Psi\rangle=(n+1)a^\dagger(\boldsymbol{p},0)|\Psi\rangle,\quad N_0a(\boldsymbol{p},0)|\Psi\rangle=(n-1)a(\boldsymbol{p},0)|\Psi\rangle$$

が満たされることなどは，ここまでに解説した手法に従って容易に確認できる．

問題 V.8　実際に演算子 N_0 及び $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},0)$ が上記の関係を満足することを確認せよ．

そこで，上記の符号の違いが他にどんな問題を引き起こすのかを見るために $|\gamma_0(\boldsymbol{p})\rangle\equiv a^\dagger(\boldsymbol{p},0)|0\rangle$ と置いてみる．すると

$$\langle\gamma_0(\boldsymbol{p})|\gamma_0(\boldsymbol{p})\rangle=-(2\pi)^3 2p^0\delta^3(0)$$

となり，常に正または0であるべき量が負になってしまうことがわかる．これは深刻な問題と言わざるを得ない．このような性質を持つ空間は**不定計量空間** (Indefinite metric space) と呼ばれるが，フォック空間がこのような性質を持ってしまうと，そこでは量子論において最も基礎的な事項の一つである確率解釈 (Probability interpretation) が成り立たなくなってしまうのである．

補助条件

ここで生じた問題の原因は，量子化された電磁場に何の制限も課されていないこと，つまり自由度が4のままになっていることである．古典電磁場の場合

には，既に説明したように，ゲージ変換を用いて自由度が 2 の状態にまで電磁ポテンシャルを書き直すことができた．それでは量子化された電磁場に対しても同様の制限 $\partial^\mu A_\mu = 0$ を課せばいいのでは？と考えたくなるが，それでは問題は解決できない．(V.29) 式より

$$\pi^0(x) = F^{00}(x) - g^{00}[\,\partial_\mu A^\mu(x)\,] = -\partial_\mu A^\mu(x)$$

となるので，$\partial_\mu A^\mu = 0$ を要求するということは $\pi^0 = 0$ を意味し，せっかくゲージ固定項の導入で回避した問題が再び現れてしまうからである．

これに対する量子論的解決策は**グプタ**(Gupta)-**ブロイラー**（Bleuler）により見出された．その方法のポイントは，4 種類の生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{p}, \lambda)$ が生み出す全体のフォック空間の中の状態ベクトルに**補助条件**（Subsidiary condition）と呼ばれる条件を課して**正定値計量**（Positive definite metric）を持つ部分空間(Subspace）を抜き出し，それを現実の光子世界と同定することである．具体的には $\partial_\mu A^\mu = 0$ を「演算子の条件」ではなく，

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \Psi \rangle = 0 \tag{V.37}$$

を満足する状態ベクトルだけが物理的に意味のある状態を記述するというように状態ベクトルに対する条件と再解釈するのである．この条件は A^μ の消滅演算子部分 $A^{(a)\mu}$ を用いて

$$\partial_\mu A^{(a)\mu}(x) | \Psi \rangle = 0 \tag{V.38}$$

と表現することもできる．何故なら，そのエルミート共役な関係として生成演算子部分 $A^{(c)\mu}(= [A^{(a)\mu}]^\dagger)$ が $\langle \Psi | A^{(c)\mu} = 0$ を満たすからである．

補助条件 (V.38) に A^μ の平面波展開 (V.35) を代入し，横波を表す偏極ベクトル $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, \lambda = 1, 2)$ が（V.14）式

$$p_\mu \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, \lambda = 1, 2) = 0$$

を満たすことを考えれば，この補助条件は

$$[\,a(\boldsymbol{p},0)-a(\boldsymbol{p},3)\,]|\Psi\rangle=0 \tag{V.39}$$

となる．しかしながら，例えば $a(\boldsymbol{p},\lambda=0)|\Psi\rangle=0$ という条件なら，それは「物理的状態にはスカラー光子は 1 個も存在してはならない」という意味になるが，条件 (V.39) はスカラー光子・縦波光子についてその存在自体までは禁止していない．それでは，実際には観測されたことのないスカラー光子や縦波光子を含む状態も物理的状態として扱っても論理矛盾は生じないのだろうか．

問題 V.9　補助条件 (V.38) から (V.39) が導かれることを確認せよ．

この不安を解消するために，スカラー光子・縦波光子演算子だけを含む個数演算子

$$N_{03}=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},3)a(\boldsymbol{k},3)-a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\,] \tag{V.40}$$

を考えてみよう．合計 n 個のスカラー光子および縦波光子を含む状態を $|\Psi_n\rangle$ と表せば

$$N_{03}|\Psi_n\rangle=n|\Psi_n\rangle$$

であるので，これと条件 (V.39) を利用すれば

$$\begin{aligned}\langle\Psi_n|N_{03}|\Psi_n\rangle&=n\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle\\&=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\langle\Psi_n|[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},3)a(\boldsymbol{k},3)-a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\,]|\Psi_n\rangle\\&=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\underbrace{\langle\Psi_n|[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},3)-a^\dagger(\boldsymbol{k},0)\,]}_{0}a(\boldsymbol{k},3)|\Psi_n\rangle=0\end{aligned} \tag{V.41}$$

つまり

$$n\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle=0\qquad\Longrightarrow\qquad n\neq 0\ \text{なら}\ \langle\Psi_n|\Psi_n\rangle=0$$

であり，スカラー光子・縦波光子を一つでも含む状態が観測される確率は 0 ということになる．従って，観測事実との矛盾は全く生じない．同様にハミルト

ニアンを生成消滅演算子で表せば V.5 で実際に示すように

$$H = \int d^3\boldsymbol{x} \ :[\pi_\mu(x)\dot{A}^\mu(x) - \mathcal{L}(x)]: \\ = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0[\sum_{\kappa=1}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) - a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)] \tag{V.42}$$

となり，容易にわかる通り $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$ には横波成分（$\kappa = 1, 2$）のみが寄与する．

なお，ここで用いたグプタ-ブロイラー形式は，**中西-ロートラップ**（Lautrup）によって補助的な新しい場（補助場）を導入するより美しい理論形式に拡張され（文献 [8]），更にそれは**九後-小嶋形式**として知られる非可換ゲージ理論（Non-Abelian gauge theory）の正準量子化へと発展した（文献 [4]）．

V.4 ゲージ変換の量子論的な意味

実は，ゲージ変換の自由度とスカラー・縦波光子の存在とは深い関係がある．これを見るために，まず

$$[\,a(\boldsymbol{p},3) - a(\boldsymbol{p},0),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}',3) - a^\dagger(\boldsymbol{p}',0)\,] = 0 \tag{V.43}$$

であることに注意しよう．従って，$|\Psi\rangle$ が補助条件 $[\,a(\boldsymbol{p},0) - a(\boldsymbol{p},3)\,]|\Psi\rangle = 0$ を満たせば，c を任意定数，$\boldsymbol{q}$ を任意運動量として

$$|\Psi'\rangle = \Big[1 + c[a^\dagger(\boldsymbol{q},3) - a^\dagger(\boldsymbol{q},0)]\Big]|\Psi\rangle$$

も同じ条件を満足する．そこで，$|\Psi'\rangle$ と $|\Psi\rangle$ で記述される状態における A^μ の期待値を比較してみよう．そのためには $a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)$，$a(\boldsymbol{p},\lambda)$ と A^μ の交換関係が必要である：

$$[\,a(\boldsymbol{p},\lambda),\ A^\mu(x)\,] = -g^{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{p},\lambda)e^{ipx}, \quad [\,a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda),\ A^\mu(x)\,] = g^{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},\lambda)e^{-ipx} \tag{V.44}$$

問題 V.10　交換関係 (V.43)，(V.44) を確認せよ．

これを用いると

$$\begin{aligned}\langle\Psi'|A^\mu(x)|\Psi'\rangle &= \langle\Psi|\Big[1+c^*[a(\boldsymbol{q},3)-a(\boldsymbol{q},0)]\Big]A^\mu(x)\\ &\qquad\qquad \times\Big[1+c[a^\dagger(\boldsymbol{q},3)-a^\dagger(\boldsymbol{q},0)]\Big]|\Psi\rangle\\ &= \langle\Psi|A^\mu(x)|\Psi\rangle\\ &+ c\langle\Psi|A^\mu(x)[a^\dagger(\boldsymbol{q},3)-a^\dagger(\boldsymbol{q},0)]|\Psi\rangle\\ &+ c^*\langle\Psi|[a(\boldsymbol{q},3)-a(\boldsymbol{q},0)]A^\mu(x)|\Psi\rangle\\ &+ |c|^2\langle\Psi|[a(\boldsymbol{q},3)-a(\boldsymbol{q},0)]A^\mu(x)[a^\dagger(\boldsymbol{q},3)-a^\dagger(\boldsymbol{q},0)]|\Psi\rangle\\ &= \langle\Psi|A^\mu(x)|\Psi\rangle+\Big[c[\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},3)+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},0)]e^{-iqx}\\ &\qquad + c^*[\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},3)+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},0)]^*e^{iqx}\Big]\langle\Psi|\Psi\rangle \end{aligned} \tag{V.45}$$

ここで，$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},3)+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},0)=q^\mu/|\boldsymbol{q}|$ であることに注意すると c，c^* を含む項は

$$\partial^\mu[-2\,\mathrm{Im}(ce^{-iqx})]/|\boldsymbol{q}|$$

とまとめられるので，結局

$$\langle\Psi'|A^\mu(x)|\Psi'\rangle=\langle\Psi|A^\mu(x)-\partial^\mu[2\,\mathrm{Im}(ce^{-iqx})]/|\boldsymbol{q}||\Psi\rangle \tag{V.46}$$

となる．従って，$|\Psi\rangle\to|\Psi'\rangle$ という変換は $\chi(x)=-2\,\mathrm{Im}(ce^{-iqx})/|\boldsymbol{q}|$ を用いるゲージ変換

$$A^\mu(x)\quad\to\quad A'^\mu(x)=A^\mu(x)+\partial^\mu\chi(x)$$

と同等であることがわかる．つまり，ゲージ変換前後の状態の違いは（観測にかからない形での）スカラー・縦波光子の数の違いということで，この差は，物理的な結果すなわち横波光子のみが関与する結果には全く影響を与えない訳である．

問題 V.11　(V.45) 式が示す結果を確認せよ．

V.5 無質量ベクトル場の基本的物理量

エネルギー運動量演算子

これまでと同様に 4 元運動量ベクトル

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} \sum_a :\Big[\, \pi_a(x)\partial^\mu u_a(x) - g^{0\mu}\mathcal{L}(x) \,\Big]:$$

の $u_a(x)$，$\pi_a(x)$ にそれぞれ $A^\alpha(x)$，$-\dot{A}_\alpha(x)$ を代入すると

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} \;:\Big[-\dot{A}_\alpha(x)\partial^\mu A^\alpha(x) + \frac{1}{2}g^{0\mu}\partial_\alpha A_\beta(x)\partial^\alpha A^\beta(x) \Big]:$$

が得られる．この第 0 成分 P^0 はエネルギー，すなわちハミルトニアン H であり，空間成分 P^i は運動量演算子を与える：

$$H = \int d^3\boldsymbol{x} \;:\Big[-\dot{A}_\alpha(x)\dot{A}^\alpha(x) + \frac{1}{2}\partial_\alpha A_\beta(x)\partial^\alpha A^\beta(x) \Big]:$$

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\boldsymbol{x} \;:\Big[\, \dot{A}_\alpha(x)\nabla A^\alpha(x) \,\Big]:$$

これを生成消滅演算子で表すために，まず H に A^μ の平面波展開を代入する：

$$\begin{aligned}
H = &\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\; k^0q^0 \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} :[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx} \,] \\
&\qquad \times [\, a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},\tau)e^{-iqx} - a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{q},\tau)e^{iqx} \,]: \\
- &\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\; \frac{1}{2}kq \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} :[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx} \,] \\
&\qquad \times [\, a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},\tau)e^{-iqx} - a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{q},\tau)e^{iqx} \,]:
\end{aligned}$$

この中で，はじめに aa の項を整理しよう．そこでは

$$\text{被積分関数} = \Big[\, k^0q^0 - \frac{1}{2}kq \,\Big] a(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},\tau)e^{-i(k+q)x}$$

であるが，$\boldsymbol{x}$ 積分を実行すると指数関数部分から $\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})$ が現れ，次に $\boldsymbol{q}$ 積分により被積分関数の中の $\boldsymbol{q}$ は全て $-\boldsymbol{k}$ となる．すると，上記の括弧内の式は

$$k^0 q^0 - \frac{1}{2}kq = (k^0)^2 - \frac{1}{2}(k^0)^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}^2 = 0$$

となる．次に $a^\dagger a^\dagger$ の項を見ると，これも全く同様に 0 となることがわかる．他方，$a^\dagger a$ を含む 2 項は $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{q}$ 積分ののち合わせて

$$-\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0 \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau)\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\tau)$$

となり，更に（V.15）の関係 $\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda') = g^{\lambda\lambda'}$ を用いて

$$H = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0 \Big[\sum_{\kappa=1}^{2} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) + a^\dagger(\boldsymbol{k},3)a(\boldsymbol{k},3) - a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\Big] \tag{V.47}$$

に達する．$\boldsymbol{P}$ についても同様に計算することができ，

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{k} \Big[\sum_{\kappa=1}^{2} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) + a^\dagger(\boldsymbol{k},3)a(\boldsymbol{k},3) - a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\Big] \tag{V.48}$$

となるが，H，$\boldsymbol{P}$ どちらにおいても補助条件 $[\,a(\boldsymbol{p},0) - a(\boldsymbol{p},3)\,]|\varPsi\rangle = 0$ のお蔭で第 0, 3 成分は物理的状態での期待値には全く寄与しない．従って，両者（H 及び $\boldsymbol{P}$）は，物理的部分空間の中ではこれらの非物理的成分を除いて

$$P^\mu = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^\mu \sum_{\kappa=1}^{2} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) \tag{V.49}$$

と表すことができる．これは，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda=1,2)$ が，現実世界に登場する運動量 $\boldsymbol{p}$ の無質量ベクトル粒子の生成消滅演算子であることを示している．事実，このことは次の関係により裏付けられる：

$$P^\mu\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle = p^\mu\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle \tag{V.50}$$

問題 V.12　$\boldsymbol{P}$ に対する（V.48）式を導き，H の結果と合わせて（V.50）を確認せよ．

これまでと同様に，ここでも $a^{(\dagger)}$ の交換関係および P^μ の表現（但し，このような場合は（V.49）ではなく全スピン成分を含めた (V.47)，(V.48) 式が必要）を用いれば一般化されたハイゼンベルク方程式

$$i\partial^\mu A^\nu(x) = [\,A^\nu(x),\, P^\mu\,] \tag{V.51}$$

が導かれ，これより

$$A^\mu(x+a) = e^{iPa}A^\mu(x)e^{-iPa} \tag{V.52}$$

或いは x と a を入れ換えたのちに $a=0$ と置いて

$$A^\mu(x) = e^{iPx}A^\mu(0)e^{-iPx} \tag{V.53}$$

という関係を得る．

スピン角運動量演算子

スカラー場・ディラック場の章で説明した通り，軌道およびスピン角運動量は

$$J^i = \int d^3\boldsymbol{x}\ :[\,x^j\mathcal{P}^k(x) - x^k\mathcal{P}^j(x) + 2\sum_a \pi_a(x)\Psi_a^{jk}(x)\,]:$$

$(i,j,k$ は $1,2,3$ またはその循環）で与えられる．ここで，ベクトル場 $A^\mu(x)$ の変換性は x^μ と同一なので

$$\Psi_a^{jk}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}[\,g^{\alpha j}A^k(x) - g^{\alpha k}A^j(x)\,]$$

という対応関係がある．これを，π_a に対応する $-\dot{A}_\alpha(x)$ と共に上記の J^i に代入すると

$$J^i = \int d^3\boldsymbol{x}\ :\Big[\,x^j\mathcal{P}^k(x) - x^k\mathcal{P}^j(x) - \dot{A}^j(x)A^k(x) + \dot{A}^k(x)A^j(x)\Big]:$$

或いは 3 次元のベクトル表記で次のようになる：

$$\boldsymbol{J} = \int d^3\boldsymbol{x}\ :\Big[\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\mathcal{P}}(x) - \dot{\boldsymbol{A}}(x)\times\boldsymbol{A}(x)\Big]:$$

スピン角運動量を表す第 2 項を生成消滅演算子で表してみよう．途中の式が長くならないように偏極ベクトルがここでは実であることも利用すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= -\int d^3\boldsymbol{x} : \dot{\boldsymbol{A}}(x) \times \boldsymbol{A}(x) : \\
&= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\, k^0 \int d^3\boldsymbol{x} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} : \Big[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx} \,\Big] \\
&\qquad\qquad \times \Big[\, a(\boldsymbol{q},\tau)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{q},\tau)e^{-iqx} + a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{q},\tau)e^{iqx} \,\Big] : \\
&= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\, k^0 \int d^3\boldsymbol{x} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \Big[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{q},\tau)e^{-i(k+q)x} \\
&\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)a(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-i(k-q)x} - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{q},\tau)e^{i(k-q)x} \\
&\qquad - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)e^{i(k+q)x} \,\Big]\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa) \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{q},\tau) \\
&= i(2\pi)^3 \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\, k^0 \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \Big[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{q},\tau)e^{-2ik^0x^0}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) \\
&\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)a(\boldsymbol{k},\kappa)\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{q},\tau)\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \\
&\qquad - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)e^{2ik^0x^0}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) \,\Big]\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa) \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{q},\tau) \\
&= \frac{i}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \Big[\, a(\boldsymbol{k},\kappa)a(-\boldsymbol{k},\tau)e^{-2ik^0x^0} \\
&\qquad - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a^\dagger(-\boldsymbol{k},\tau)e^{2ik^0x^0} \,\Big]\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa) \times \boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},\tau) \\
&\quad + \frac{i}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\tau)a(\boldsymbol{k},\kappa) - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau) \,\Big]\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa) \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\tau)
\end{aligned}
$$

（第 1 · 2 項は $\boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}$, $\kappa \leftrightarrow \tau$ の交換で符号が逆になるので 0 ）

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\tau)a(\boldsymbol{k},\kappa) - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau) \,\Big]\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa) \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\tau) \\
&= -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau)\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa) \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\tau) \qquad \text{(V.54)}
\end{aligned}
$$

となる.[♯V.4] これよりヘリシティ演算子 S_h は

$$
S_h = -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau)\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\big[\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa) \times \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\tau) \,\big] \qquad \text{(V.55)}
$$

[♯V.4] この $\boldsymbol{S}$ は時間に依存しておらず単独で保存量になっているように見えるが，これはファインマンゲージの採用により一般化運動量が $\pi_\alpha = -\dot{A}_\alpha$ と簡単な形になった結果である．但し，これから求められるヘリシティ S_h は既に説明した通り常に保存量となる．

で与えられるが，$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0)$ の空間成分＝0 および $\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$ であることを思い出せば，κ,τ についての和の中で寄与するのは $\kappa,\tau=1,2$ (但し,$\kappa\neq\tau$) だけであることがわかる．従って，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},1)\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2)=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$ も用いて

$$S_h=-i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},1)a(\boldsymbol{k},2)-a^\dagger(\boldsymbol{k},2)a(\boldsymbol{k},1)\,] \tag{V.56}$$

を得る．

見ればわかるように，これはスピン成分について非対角的である．従って，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},1)$，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},2)$ は両方とも確定したヘリシティ値の生成消滅演算子にはなっていない．そこで，$a(\boldsymbol{p},\lambda=1,2)$ を

$$a(\boldsymbol{p},h=\pm1)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[\,a(\boldsymbol{p},1)\mp ia(\boldsymbol{p},2)\,] \tag{V.57}$$

と組み替えると，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},h)$ は $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda)$ と同様の交換関係を満たし，S_h は

$$\begin{aligned}S_h&=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},+1)a(\boldsymbol{k},+1)-a^\dagger(\boldsymbol{k},-1)a(\boldsymbol{k},-1)\,]\\&=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{h=\pm1}h\,a^\dagger(\boldsymbol{k},h)a(\boldsymbol{k},h)\end{aligned} \tag{V.58}$$

と対角化される．つまり，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},h)$ が確定したヘリシティ $h\,(=+1$ または $-1)$ を持つ粒子の生成消滅演算子ということがわかる．事実，

$$S_h\,a^\dagger(\boldsymbol{p},h)|0\rangle=h\,a^\dagger(\boldsymbol{p},h)|0\rangle \tag{V.59}$$

という関係が成り立つことも容易に確認できる．なお，このように $a^{(\dagger)}$ の組み替えを行っても

$$a^\dagger(\boldsymbol{p},+1)a(\boldsymbol{p},+1)+a^\dagger(\boldsymbol{p},-1)a(\boldsymbol{p},-1)=a^\dagger(\boldsymbol{p},1)a(\boldsymbol{p},1)+a^\dagger(\boldsymbol{p},2)a(\boldsymbol{p},2)$$

という関係があることは容易に確かめられるので，個数演算子 N や 4 元運動量演算子 P^μ が非対角的になるのでは？という心配は無用である．

問題 V.13　$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},h)$ の交換関係を導き，それを用いて（V.59）式を確認せよ．

但し，上記の組み替えは A^μ の平面波展開の物理的成分（$\lambda = 1, 2$ 成分）には影響を与える．そこで，(V.57) に対応して $h = \pm 1$ を表す偏極ベクトルを

$$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, h = \pm 1) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\,\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, 1) \pm i\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, 2)\,] \tag{V.60}$$

と導入すると A^μ への物理的成分の寄与は

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=1,2} [\, a(\boldsymbol{k}, \kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k}, \kappa)e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k}, \kappa)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k}, \kappa)e^{ikx}\,] \\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{h=\pm 1} [\, a(\boldsymbol{k}, h)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k}, h)e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k}, h)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k}, h)e^{ikx}\,] \end{aligned} \tag{V.61}$$

と書き直される．

ここで，(V.17) のように $\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p}, i)$ $(i = 1, 2)$ を決めたので $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ に対しては

$$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p}, h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, -h) \quad (h = \pm 1) \tag{V.62}$$

となることに注意しよう．以下ではこの関係を用いるが，但し，これには絶対的な意味はない．実際，$\boldsymbol{p}$ の逆転に対して $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p}, 2)$ の方が符号を変えると決めてもよいが，その場合には $\varepsilon^\mu(-\boldsymbol{p}, h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, -h)$ である．

V.6 生成消滅演算子のローレンツ及びC·P·T変換性

ローレンツ変換

スカラー場・ディラック場と同様に，電磁場生成消滅演算子のローレンツ変換性を調べよう．この場合もディラック場と同様にスピン量子数が関与するので結果はスカラー場ほど簡単ではないが，議論の進め方に変わりはない．

はじめに，古典場の変換性（V.1）式 $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$ から得られる量子場の関係

$$U(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu A^\nu(x') \tag{V.63}$$

の両辺に A^μ の平面波展開を代入する：

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\kappa \Big[& U(\Lambda)a(\boldsymbol{k},\kappa)U(\Lambda)^{-1}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} \\
& + U(\Lambda)a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)U(\Lambda)^{-1}\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx} \Big] \\
\text{右辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\kappa \Big[& a(\boldsymbol{k},\kappa)(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx'} \\
& + a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\varepsilon^{\nu *}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx'} \Big]
\end{aligned}
$$

これから生成消滅演算子のローレンツ変換性を決めるためには，まず右辺の $\Lambda^{-1}\varepsilon$ を左辺と直接比較できる形にしなければならない．これは，κ が何を意味するかに依存するが，ローレンツ変換により基準となる運動量が $\boldsymbol{k}$ から $\Lambda^{-1}\boldsymbol{k}$ に変わることを考えれば，一般に

$$
(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\kappa) = \sum_\tau \mathcal{R}_{\kappa\tau}\varepsilon^\mu(\Lambda^{-1}\boldsymbol{k},\tau) \tag{V.64}
$$

と書ける.[♯V.5] 従って，

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau} \Big[& a(\boldsymbol{k},\kappa)\mathcal{R}_{\kappa\tau}\varepsilon^\mu(\Lambda^{-1}\boldsymbol{k},\tau)e^{-ikx'} \\
& + a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\mathcal{R}^*_{\kappa\tau}\varepsilon^{\mu *}(\Lambda^{-1}\boldsymbol{k},\tau)e^{ikx'} \Big]
\end{aligned}
$$

となるので，スカラー場・ディラック場のときと同じように積分変数を $k \to k' = \Lambda k$ と替え，そのあとで κ と τ を書き換えると

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\tau \Big[\sum_\kappa \mathcal{R}_{\kappa\tau}a(\Lambda\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\tau)e^{-ikx} \\
&\qquad + \sum_\kappa \mathcal{R}^*_{\kappa\tau}a^\dagger(\Lambda\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k},\tau)e^{ikx} \Big] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_\kappa \Big[\sum_\tau \mathcal{R}_{\tau\kappa}a(\Lambda\boldsymbol{k},\tau)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} \\
&\qquad + \sum_\tau \mathcal{R}^*_{\tau\kappa}a^\dagger(\Lambda\boldsymbol{k},\tau)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx} \Big]
\end{aligned}
$$

[♯V.5] これもディラック場の場合と同様に $\Lambda^{-1}\varepsilon(\boldsymbol{k},\kappa)$ を改めて完全系 $\varepsilon(\Lambda^{-1}\boldsymbol{k},\tau)$ で展開したということである．

これを左辺と比較して

$$U(\Lambda)a(\boldsymbol{p},\lambda)U(\Lambda)^{-1}=\sum_{\tau}\mathcal{R}_{\tau\lambda}a(\Lambda\boldsymbol{p},\tau) \tag{V.65}$$

を得る．また，状態 $|\boldsymbol{p},\lambda\rangle$ の変換性は

$$|\boldsymbol{p},\lambda\rangle \quad \rightarrow \quad U(\Lambda)|\boldsymbol{p},\lambda\rangle=\sum_{\tau}\mathcal{R}^{*}_{\tau\lambda}|\Lambda\boldsymbol{p},\tau\rangle \tag{V.66}$$

で与えられる．

ディラック場の $\mathcal{D}^{u,v}$ と同様に，ここでも $\mathcal{R}$ の具体的な中身が個々の変換に依存することは勿論である．また，この一般的な表現では第0成分から第3成分まで全て入り混じるように見えるが，実際には物理的状態に対する補助条件（V.39）があるので，

$$\begin{aligned}&U(\Lambda)[\,a(\boldsymbol{p},0)-a(\boldsymbol{p},3)\,]|\Psi\rangle=0\\ &\qquad\Longrightarrow\quad U(\Lambda)[\,a(\boldsymbol{p},0)-a(\boldsymbol{p},3)\,]U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda)|\Psi\rangle=0\end{aligned}$$

でなければばならない．ここで，$|\Psi\rangle$ は任意の物理的状態であるので，結局 $U(\Lambda)$ $a(\boldsymbol{p},0)U(\Lambda)^{-1}$，$U(\Lambda)a(\boldsymbol{p},3)U(\Lambda)^{-1}$ 共に $a(\boldsymbol{p},0)$，$a(\boldsymbol{p},3)$ と同じ条件に従うことがわかる．

C変換

古典電磁場のC変換性は，実スカラー場と同じく $A'^{\mu}(x)=A^{\mu}(x)$ と決められるように見える．また，そのように定義してもマクスウェル方程式

$$(g_{\mu\nu}\Box-\partial_{\mu}\partial_{\nu})A^{\nu}(x)+\frac{1}{\alpha}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}(x)=0$$

との間にも何の矛盾も生じない．しかし，量子化された電磁場と電荷 q_{ψ} の荷電ディラック場との相互作用（電磁相互作用）は

$$q_{\psi}:\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x):A^{\mu}(x)$$

という形で記述されることが知られており，$:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$ はC変換の下で

$$\mathcal{C}:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):\mathcal{C}^{-1} = -:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):$$

と振る舞うので，上記の電磁相互作用をC不変に保つためには

$$\mathcal{C}A^\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -A^\mu(x) \tag{V.67}$$

と決めなければならない．

この結果，A^μ の平面波展開を上式に代入することにより，生成消滅演算子の変換性が

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p},h)\mathcal{C}^{-1} = -a(\boldsymbol{p},h) \tag{V.68}$$

と得られる．

P変換

電磁場 A^μ はベクトル場なので，P変換性は x^μ や p^μ と同じものであると考えられる．実際，

$$\mathcal{P}A^\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = A_\mu(\tilde{x}) \tag{V.69}$$

であるなら，$:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$ のP変換性

$$\mathcal{P}:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):\mathcal{P}^{-1} =:\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^\mu\psi(\tilde{x}):$$

より，電磁相互作用のP不変性が保証される．

生成消滅演算子の変換性は，平面波展開に用いる偏極ベクトルとその空間反転に対する振る舞いに依存する．

- $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda=1,2)$ を用いた場合

本書では（V.17）式のように $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},\lambda=1,2)$ の性質を決めたので，

$$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p},\lambda) = (-1)^{\lambda-1}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$$

という関係が成り立つ．これを用いると

$$\mathcal{P}a(\boldsymbol{p},\lambda)\mathcal{P}^{-1}=(-1)^{\lambda-1}a(-\boldsymbol{p},\lambda) \tag{V.70}$$

が得られる．

- $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},h=\pm1)$ を用いた場合

この場合は（V.62）式で示した関係 $\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p},h)=\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},-h)$ が

$$\mathcal{P}a(\boldsymbol{p},h)\mathcal{P}^{-1}=a(-\boldsymbol{p},-h) \tag{V.71}$$

という結果を導く．

問題 V.14　上に示した偏極ベクトルの性質を用いて（V.69）から（V.70, V.71）式を導け．

T変換

ここでも電磁場 A^μ のT変換性は本質的には x^μ や p^μ と同じものであると考えられるが

$$\mathcal{T}:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):\mathcal{T}^{-1}=:\bar{\psi}(-\tilde{x})\gamma^\mu\psi(-\tilde{x}):$$

であることより，電磁相互作用のT不変性は[♯V.6]

$$\mathcal{T}A^\mu(x)\mathcal{T}^{-1}=A_\mu(-\tilde{x}) \tag{V.72}$$

であることを要請する．

生成消滅演算子については，P変換の場合と同様に偏極ベクトルの選択とその変換性に依存する．

- $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda=1,2)$ を用いた場合

$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p},\lambda)=(-1)^{\lambda-1}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$ 及び $\mathcal{T}$ の反線形性より

$$\mathcal{T}a(\boldsymbol{p},\lambda)\mathcal{T}^{-1}=(-1)^{\lambda-1}a(-\boldsymbol{p},\lambda) \tag{V.73}$$

[♯V.6] この相互作用の結合定数（電荷）は実数であることに注意しよう．

となる．

● $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, h=\pm 1)$ を用いた場合

$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p}, h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, -h)$ 及び $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, h)$ の定義より $\varepsilon^*_\mu(-\boldsymbol{p}, h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, h)$ だから，ここでも $\mathcal{T}$ の反線形性に注意して

$$\mathcal{T} a(\boldsymbol{p}, h)\mathcal{T}^{-1} = a(-\boldsymbol{p}, h) \tag{V.74}$$

を得る．

問題 V.15　上に示した偏極ベクトルの性質を用いて（V.72）より（V.73, V.74）式を導け．

V.7 無質量ベクトル場の伝播関数

電磁場の伝播関数は

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv i\langle 0|\mathrm{T}\, A^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle \tag{V.75}$$

と定義される．但し，ここでも以下の計算では $y=0$ と置いた表現を用いる．この運動量表示 $D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p)$ を求めよう．$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x)$ の定義式に A^μ の運動量展開（V.35）を代入し $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle$ という項のみが残ることに注意すると

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x) &= i\langle 0|\mathrm{T}\, A^\mu(x)A^\nu(0)\,|0\rangle \\
&= i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} d^3\tilde{\boldsymbol{q}} \sum_{\kappa,\tau}\Big[\underbrace{\langle 0|a(\boldsymbol{k},\kappa)a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)|0\rangle}_{-(2\pi)^3 2k^0 g^{\kappa\tau}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\nu*}(\boldsymbol{q},\tau)e^{-ikx}\theta(x^0) \\
&\qquad + \underbrace{\langle 0|a(\boldsymbol{q},\tau)a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)|0\rangle}_{-(2\pi)^3 2k^0 g^{\kappa\tau}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{q},\tau)e^{ikx}\theta(-x^0)\,\Big] \\
&= -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa} g^{\kappa\kappa}\Big[\,\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\nu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx}\theta(x^0) \\
&\qquad + \varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\theta(-x^0)\,\Big]
\end{aligned}$$

ここで偏極ベクトル ε^μ の完全性条件（V.16）及びスカラー場の節において導いた（Ⅲ.73）式を用いると

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu}\Delta_{\mathrm{F}}(x) \tag{V.76}$$

となり，Δ_{F} の運動量表示（Ⅲ.72）で $m=0$ と置いて

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu}}{p^2+i\varepsilon} \tag{V.77}$$

を得る．

但し，この“正攻法”が短い計算で完了したのはファインマンゲージの採用で演算子の交換関係が簡単な形にまとまっていたからである．ゲージパラメータ α を残したまま $D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p)$ を求めるにはグリーン関数を利用する方がよい.[♯V.7] とは言うものの，こちらの方法が格段に簡単という訳ではなく，やはり少々忍耐強い計算が必要なのだが，以下でそれを実行してみよう．

まず，正準量子化の条件（V.30）及び（V.31）を（V.29）式を用いて A^μ と $\dot{A}^\mu$ のみで書き直すと

$$\begin{aligned}
&[\,\dot{A}^\mu(x),\, A^\nu(x')\,] = ig^{\mu\nu}[\,1-(1-\alpha)g^{\mu0}\,]\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&[\,\dot{A}^0(x),\, \dot{A}^i(x')\,] = i(1-\alpha)\partial^i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&[\,A^\mu(x),\, A^\nu(x')\,] = [\,\dot{A}^0(x),\, \dot{A}^0(x')\,] = [\,\dot{A}^i(x),\, \dot{A}^j(x')\,] = 0
\end{aligned} \tag{V.78}$$

となる．これは V.3 節で $\alpha=1$ として導いた（V.33）の一般化である．この同時刻交換関係と運動方程式（マクスウェル方程式）

$$\Big(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\Big)A^\nu(x) = 0$$

より，$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x)$ は（Ⅲ.69）式の導出を参考にして

$$\Big(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\Big)D_{\mathrm{F}}^{\nu\rho}(x) = -g_\mu{}^\rho\delta^4(x) \tag{V.79}$$

[♯V.7] $\alpha \neq 1$ の場合に上と同じ手法を採用すると計算は少々複雑になる．興味ある読者は文献 [9] の 7 章を参照されたい．

を満たすことがわかるので，この左辺に

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx} D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k)$$

を，右辺には

$$\delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx}$$

を代入して両辺を比較すれば

$$\left(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu - \frac{1}{\alpha}p_\mu p_\nu\right) D_{\mathrm{F}}^{\nu\rho}(p) = -g_\mu{}^\rho \tag{V.80}$$

という関係が得られる．

これを満たす $D_{\mathrm{F}}^{\nu\rho}(p)$ の具体形は，そのローレンツ共変性より決めることができる．すなわち，$D_{\mathrm{F}}^{\nu\rho}(p)$ は4元ベクトル p のみの関数であり2階対称テンソルの変換性を持つ量なので，必ず

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu}A(p^2) + p^\mu p^\nu B(p^2)$$

（A，B は共にスカラー量）と書ける．これを（V.80）に代入して

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \left(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu - \frac{1}{\alpha}p_\mu p_\nu\right)(g^{\nu\rho}A + p^\nu p^\rho B) \\
&= -p^2 g_\mu{}^\rho A + \frac{1}{\alpha}p_\mu p^\rho(\alpha A - A - p^2 B) = \text{右辺} = -g_\mu{}^\rho
\end{aligned}$$

ここで両辺の $g_\mu{}^\rho$，$p_\mu p^\rho$ の係数を比較して直ちに A，B を決めることもできるが，このような計算に慣れていない読者は両辺に $g^\mu{}_\rho$，$p^\mu p_\rho$ を掛け両添字につき縮約して（和をとって）

$$\begin{aligned}
-4p^2 A + \frac{1}{\alpha}p^2(\alpha A - A - p^2 B) &= -4 \\
-p^4 A + \frac{1}{\alpha}p^4(\alpha A - A - p^2 B) &= -p^2
\end{aligned}$$

という A，B に関する連立方程式に表現し直せばよい．勿論どちらの方法でも

$$A(p^2) = 1/p^2, \quad B(p^2) = -(1-\alpha)/p^4$$

が得られるので，それぞれの分母に「$+i\varepsilon$ ルール」を適用することによって

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} - (1-\alpha)\frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + i\varepsilon)^2} \tag{V.81}$$

に達するという訳である．

問題 V.16　A^μ，$\dot{A}^\mu$ の間に（V.78）式の関係が成り立つことを示せ．

問題 V.17　伝播関数 $D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x)$ が実際に（V.79）式を満たすことを確認せよ．

V.8 有質量ベクトル場の量子化と演算子

電磁場の場合とは異なり，プロカ方程式とそのラグランジアンはゲージ不変性を持っていない．従って，電磁場のときのような問題は生じることもなく，始めからローレンツ条件を用いて第 0 成分 A^0 を消去し，空間成分 $\boldsymbol{A}$ に対して量子化を実行することも可能である（プロカ形式）．しかし，その形式では，そのまま $m \to 0$ の極限を考えることは許されない．事実，例えば（V.19）のラグランジアンで m を 0 と置くと，それはゲージ固定項のない（つまり，そのままでは量子化できない）電磁場ラグランジアンになってしまう．また，クーロンゲージでの電磁場量子化と同じく理論体系の明白な共変性も損なわれてしまう．

そこで，ここでも電磁場の場合と同様に「ゲージ固定項」を加えたラグランジアン

- 実ベクトル場

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu(x)A^\mu(x) - \frac{1}{2\alpha}[\,\partial_\mu A^\mu(x)\,]^2 \tag{V.82}$$

- 複素ベクトル場

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}F^*_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^*_\mu(x)A^\mu(x) - \frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^{\mu *}(x)\partial_\nu A^\nu(x) \tag{V.83}$$

から出発することにしよう．これは**シュトゥッケルベルク**（Stueckelberg）形式と呼ばれる．但し，この形式では補助条件の設定において一工夫が必要になるのだが，それは生成消滅演算子の導入が完了したところで説明することにする．

上記の $\mathcal{L}$ から導かれる運動方程式は

$$[\,g_{\mu\nu}(\Box+m^2)-\partial_\mu\partial_\nu\,]A^\nu(x)+\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu A^\nu(x)=0 \tag{V.84}$$

となるが，$\mathcal{L}$ の質量項は $\dot{A}^\mu$ を含まないため，A^μ に共役な一般化運動量の形は電磁場の場合と変わらない：

- 実ベクトル場

$$\pi_\mu(x)=F_{\mu0}(x)-\frac{1}{\alpha}g_{\mu0}[\,\partial_\nu A^\nu(x)\,] \tag{V.85}$$

- 複素ベクトル場

$$\begin{aligned}\pi_\mu(x)&=F^*_{\mu0}(x)-\frac{1}{\alpha}g_{\mu0}[\,\partial_\nu A^{\nu*}(x)\,],\\ \pi_{*\mu}(x)&=F_{\mu0}(x)-\frac{1}{\alpha}g_{\mu0}[\,\partial_\nu A^\nu(x)\,]\,(=\pi^*_\mu(x)\,)\end{aligned} \tag{V.86}$$

この π，A（＋複素場の π^*，A^*）に対して同時刻の正準交換関係

$$[\,\pi_\mu(x),\,A^\nu(x')\,]=[\,\pi^\dagger_\mu(x),\,A^{\nu\dagger}(x')\,]=-i\delta^\nu_\mu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

或いは，共に反変成分を用いた

$$[\,\pi^\mu(x),\,A^\nu(x')\,]=[\,\pi^{\mu\dagger}(x),\,A^{\nu\dagger}(x')\,]=-ig^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{V.87}$$

（$x^\mu=(t,\boldsymbol{x})$，$x'^\mu=(t,\boldsymbol{x}')$，これ以外の組み合わせは全て 0）が設定される．

以下では $\alpha=1$ のファインマンゲージを採る．すると運動方程式は

$$(\Box+m^2)A^\mu(x)=0 \tag{V.88}$$

となるので，量子場 A^μ の平面波展開も古典場と同じ形で

• 実ベクトル場

$$A^\mu(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3} [\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \tag{V.89}$$

• 複素ベクトル場

$$A^\mu(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3} [\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} + b^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \tag{V.90}$$

（但し，$k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$）と得られ，展開の各係数は

$$\begin{aligned}
&[\, a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, b(\boldsymbol{p},\lambda),\ b^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = -(2\pi)^3 2p^0 g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\\
&[\, a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, b(\boldsymbol{p},\lambda),\ b(\boldsymbol{p}',\lambda')\,]\\
&= [\, b^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda),\ b^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda),\ b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = 0
\end{aligned} \tag{V.91}$$

（もちろん実場には a，$a^\dagger$ のみが関与）を満たす生成消滅演算子となる．

なお，この場合も，始めからファインマンゲージを採用するならラグランジアン（V.82, V.83）はそれぞれ（発散項を除いて）

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu(x)A^\mu(x) \tag{V.92}$$

$$\mathcal{L}(x) = -\partial_\mu A^*_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x) + m^2 A^*_\mu(x)A^\mu(x) \tag{V.93}$$

と扱い易い形となる．

問題 V.18　上記のラグランジアンから $\pi^\mu(x)$ を求め，それを $a^{(\dagger)}$，$b^{(\dagger)}$ で表せ．次に，生成消滅演算子が（V.91）式を満たすなら実際に量子化条件（V.87）が成り立つことを確認せよ．

さて，この場合も（V.91）からわかるように，生成消滅演算子の第 0 成分の交換関係から不定計量問題が現れるので，電磁場に倣って

$$\langle \Psi|\partial_\mu A^\mu(x)|\Psi\rangle = 0 \quad \text{または} \quad \partial_\mu A^{(a)\mu}(x)|\Psi\rangle = 0$$

（＋複素場の $A^{\mu\dagger}$ への条件）という補助条件を課したくなるが，実はこれは許されない．本書ではこれまで触れなかったが，各量子場の間には，正準量子化の際に設定される同時刻交換関係の他に，同時刻ではない 4 次元的な交換関係も存在する．例えば，ここで考えている実ベクトル場の関係は，不変デルタ関数と呼ばれる関数

$$\begin{aligned}\Delta(x-y) &\equiv -i[\,\phi(x),\,\phi(y)\,]\\ &= -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\,]\end{aligned} \tag{V.94}$$

（ϕ は質量 m の実スカラー場）を用いて

$$[\,A^\mu(x),\,A^\nu(y)\,] = -ig^{\mu\nu}\Delta(x-y) \tag{V.95}$$

と与えられる．この Δ は，定義からわかるように

$$(\Box + m^2)\Delta(x-y) = 0$$

を満たすので，上記 A^μ の 4 次元的交換関係より

$$[\,\partial_\mu A^\mu(x),\,\partial_{(y)\nu}A^\nu(y)\,] = i\partial_\mu\partial^\mu\Delta(x-y) = -im^2\Delta(x-y) \neq 0 \tag{V.96}$$

が得られるが，これは $\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi\rangle = 0$ とは両立できないのである．[♯V.8]

この問題の一つの解決策は，A^μ とは独立だが同じ質量を持つ実スカラー場 ϕ を同時に考えて，

$$\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu(x)+m\phi(x)|\Psi\rangle = 0 \quad \text{または} \quad [\,\partial_\mu A^{(a)\mu}(x)+m\phi^{(a)}(x)\,]|\Psi\rangle = 0 \tag{V.97}$$

という補助条件を導入することである．これは，$m \to 0$ の極限を考えればわかるように，グプタ-ブロイラーの補助条件の自然な拡張と言える．或いは，修正されたベクトル場

$$\mathcal{A}^\mu_\phi(x) \equiv A^\mu(x) - \frac{1}{m}\partial^\mu\phi(x) \tag{V.98}$$

♯V.8 ここでは y 微分を $\partial_{(y)}$ と表した．Δ は $x-y$ だけに依存するので $\partial_{(y)}\Delta = -\partial\Delta$ であることに注意しよう．ちなみに，(V.96) は $m=0$（つまり電磁場）なら何の問題も発生しないことも示している．

を導入し,

$$\langle\Psi|\partial_\mu \mathcal{A}_\phi^\mu(x)|\Psi\rangle = 0 \quad \text{または} \quad \partial_\mu \mathcal{A}_\phi^{(a)\mu}(x)|\Psi\rangle = 0 \tag{V.99}$$

と表現してもよい．この $\mathcal{A}_\phi^\mu$ の 4 次元的交換関係は

$$[\,\mathcal{A}_\phi^\mu(x),\, \mathcal{A}_\phi^\nu(y)\,] = -i\Big(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\Big)\Delta(x-y) \tag{V.100}$$

なので $[\partial_\mu \mathcal{A}_\phi^\mu(x),\, \partial_{(y)\nu}\mathcal{A}_\phi^\nu(y)] = 0$ となり，$\langle\Psi|\partial_\mu \mathcal{A}_\phi^\mu|\Psi\rangle = 0$ との間に矛盾は生じない．複素ベクトル場についても，同じ質量および電荷を持つ複素スカラー場を用いて同様の補助条件を設定できる．

次に，これらの条件に A^μ の平面波展開（V.89）と III 章で調べたスカラー場の平面波展開を代入すれば，ここでも（V.39）のように消滅演算子を用いた表現が得られる．但し，運動量と偏極ベクトルの間には，電磁場の場合とは違って縦波成分も含めた $p_\mu \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, \lambda = 1,2,3) = 0$ の関係があるので，それは

$$[\,a(\boldsymbol{p},0) + ia(\boldsymbol{p})\,]|\Psi\rangle = 0, \quad [\,b(\boldsymbol{p},0) + ib(\boldsymbol{p})\,]|\Psi\rangle = 0 \tag{V.101}$$

となる．電磁場の場合は，非物理的な縦波およびスカラー成分が打ち消し合う形だったが，ここではスカラー成分とスカラー場の寄与が打ち消し合うという条件である．

問題 V.19　（V.94,V.95）で与えた ϕ，A^μ の 4 次元的交換関係と $[\phi(x),\, A^\mu(y)] = 0$ を用いて $\mathcal{A}_\phi^\mu$ の 4 次元的交換関係（V.100）を導け．

問題 V.20　実ベクトル場に対し，スカラー成分＋スカラー場の個数演算子を

$$N_{0\mathrm{S}} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,-a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\,]$$

と定義する．その固有値・固有状態 $N_{0\mathrm{S}}|\Psi_n\rangle = n|\Psi_n\rangle$ において，$n \neq 0$ なら $\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle = 0$ であることを示せ．また，複素ベクトル場に対しも同様に調べてみよ．

ここで読者は“ベクトル場の量子化なのに何故スカラー場を持ち込むのか．ベクトル場だけで話を完結させることはできないのか？”という疑問を持つかも知

れないが，正にそれを実際に行うのが，はじめに述べたプロカ形式である．但し，その場合は質量0の極限と明白な共変性が失われ，逆にシュトゥッケルベルク形式ではそれらが維持される代償としてスカラー場の助けが必要になるということである．

また，III章の冒頭で述べた素粒子の標準理論によれば，我々の宇宙全体はヒッグス場と名付けられたスカラー場（ϕ）で満たされており，それを切り離して他の場を考えることはできない．そして，この枠組みにおいては，ゲージ場と呼ばれる無質量ベクトル場 A^μ は $\partial^\mu\phi$ という形の項を縦波成分として吸収することにより質量を獲得するのである（ヒッグス機構）．そのような理解の下で再度シュトゥッケルベルク形式を眺めれば，違和感も和らぐのではないかと思う．なお，この有質量ベクトル場も，補助場を用いる中西-ロートラップ形式で再定式化できることが知られている（文献[8]）．

V.9 有質量ベクトル場の基本的物理量

エネルギー運動量演算子

はじめに実場について考える．無質量ベクトル場の場合と同様に

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} \sum_a :\Big[\,\pi_a(x)\partial^\mu u_a(x) - g^{0\mu}\mathcal{L}(x)\Big]:$$

の $u_a(x)$，$\pi_a(x)$ にそれぞれ $A^\alpha(x)$，$-\dot{A}_\alpha(x)$ を代入すると

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} \ :\Big[-\dot{A}_\alpha(x)\partial^\mu A^\alpha(x) + \frac{1}{2}g^{0\mu}\big[\,\partial_\alpha A_\beta(x)\partial^\alpha A^\beta(x) - m^2 A_\alpha(x)A^\alpha(x)\big]\Big]:$$

或いは，より具体的には

$$H = \int d^3\boldsymbol{x} \ :\Big[-\dot{A}_\alpha(x)\dot{A}^\alpha(x) + \frac{1}{2}\partial_\alpha A_\beta(x)\partial^\alpha A^\beta(x) - \frac{1}{2}m^2 A_\alpha(x)A^\alpha(x)\Big]:$$

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\boldsymbol{x} \ :\Big[\,\dot{A}_\alpha(x)\nabla A^\alpha(x)\Big]:$$

が得られる.

これらの生成消滅演算子表現を求めよう. 質量項の寄与に注意する以外は無質量ベクトル場での計算と同じように進めればよい. なお, 補助条件設定のためにスカラー場を導入したが, その寄与は既知なので途中の計算には含めない.

$$
\begin{aligned}
H = \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\; k^0 q^0 \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} &:\![\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu^*(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \\
&\times [\, a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},\tau)e^{-iqx} - a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{q},\tau)e^{iqx}\,]\!: \\
- \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\; \frac{1}{2}kq \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} &:\![\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu^*(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \\
&\times [\, a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},\tau)e^{-iqx} - a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{q},\tau)e^{iqx}\,]\!: \\
- \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\; \frac{1}{2}m^2 \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} &:\![\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu^*(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \\
&\times [\, a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},\tau)e^{-iqx} + a^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{q},\tau)e^{iqx}\,]\!:
\end{aligned}
$$

ここでも aa 項の整理から始める.

$$
\text{被積分関数} = \Big[\, k^0q^0 - \frac{1}{2}kq - \frac{1}{2}m^2 \,\Big] a(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{q},\tau)e^{-i(k+q)x}
$$

の $\boldsymbol{x}$ 積分で指数関数部分から $\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})$ が現れ, $\boldsymbol{q}$ 積分により被積分関数中の $\boldsymbol{q}$ は全て $-\boldsymbol{k}$ となって上記の括弧内は 0 となる:

$$
k^0q^0 - \frac{1}{2}kq - \frac{1}{2}m^2 = (k^0)^2 - \frac{1}{2}(k^0)^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}^2 - \frac{1}{2}m^2 = 0
$$

全く同様に $a^\dagger a^\dagger$ 項の寄与も 0 となる. 残る $a^\dagger a$ を含む 2 項は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{q}$ 積分ののち足し合わされて

$$
-\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\; k^0 \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau)\varepsilon_\mu^*(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\tau)
$$

となり, 更に $\varepsilon_\mu^*(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda') = g^{\lambda\lambda'}$ を用いて

$$
H = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\; k^0 \Big[\, \sum_{\kappa=1}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) - a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0) \,\Big] \tag{V.102}
$$

を得る．$\boldsymbol{P}$ についても全く同様の計算により求められる：

$$\boldsymbol{P} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{k}\Big[\sum_{\kappa=1}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) - a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\Big] \tag{V.103}$$

ここで，補助条件 $[\,a(\boldsymbol{p},0)+ia(\boldsymbol{p})\,]|\Psi\rangle = 0$ を用いると，H，$\boldsymbol{P}$ の中の $\lambda = 0$ 成分はスカラー場の寄与

$$\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0 a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}), \quad \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{k}\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$$

と打ち消し合い物理的状態の世界には何の影響も与えないことがわかる．従って，H と $\boldsymbol{P}$ は，まとめて

$$P^\mu = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^\mu \sum_{\kappa=1}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) \tag{V.104}$$

と表すことができる．これは，$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ の関係も考慮すれば，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda)$ が運動量 $\boldsymbol{p}$，質量 m のベクトル粒子生成消滅演算子であることを示している．事実，これは次の関係により確認できる：

$$P^\mu\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle = p^\mu\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle \tag{V.105}$$

問題 V.21　(V.103) 式を導き，H の結果と合わせて (V.105) を確かめよ．

全く同様に，複素場については

$$P^\mu = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^\mu \sum_{\kappa=1}^{3} [\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) + b^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)b(\boldsymbol{k},\kappa)\,] \tag{V.106}$$

及びこれに基づいて

$$P^\mu\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle = p^\mu\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle, \quad P^\mu\, b^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle = p^\mu\, b^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)|0\rangle \tag{V.107}$$

という結果を得る．

また，ここでも一般化されたハイゼンベルク方程式

$$i\partial^\mu A^\nu(x) = [\, A^\nu(x),\, P^\mu\,] \tag{V.108}$$

及び

$$A^\mu(x+a) = e^{iPa}A^\mu(x)e^{-iPa},$$

$$A^\mu(x) = e^{iPx}A^\mu(0)e^{-iPx} \tag{V.109}$$

という関係が成り立っている.

問題 V.22　(V.106) 式を導け.

スピン角運動量演算子

有質量実ベクトル場のスピン演算子の表現も

$$\boldsymbol{S} = -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau)\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa)\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{V.110}$$

という形までは無質量ベクトル場のそれ (V.54) と同じである. 但し, 質量がある場合の偏極ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},0)$ と $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$ は無質量の場合のそれと同じではないため, 中身は少々異なる. しかしながら, ヘリシティ演算子

$$S_h = -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau)\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}[\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\kappa)\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\tau)\,]$$

を考えれば, この差は消滅する. つまり, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},1)$ と $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2)$ は無質量の場合と同じであり, この二つだけが S_h に寄与するので, 結局, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},1)\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2) = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ も用いて

$$S_h = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},1)a(\boldsymbol{k},2) - a^\dagger(\boldsymbol{k},2)a(\boldsymbol{k},1)\,] \tag{V.111}$$

となる. 勿論, ここにはスピン 0 のスカラー粒子は全く寄与しない.

問題 V.23　実際に (V.110) 式を確認せよ.

ここでも

$$a(\boldsymbol{p},\pm 1) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\,a(\boldsymbol{p},1)\mp ia(\boldsymbol{p},2)\,] \tag{V.112}$$

と組み替えると，S_h は

$$S_h = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},+1)a(\boldsymbol{k},+1) - a^\dagger(\boldsymbol{k},-1)a(\boldsymbol{k},-1)\,] \tag{V.113}$$

と対角化される．つまり，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},h)$ が確定したヘリシティ $h(=1$ または $-1)$ を持つ粒子の生成消滅演算子ということがわかる．事実，

$$S_h\, a^\dagger(\boldsymbol{p},h)|0\rangle = h\, a^\dagger(\boldsymbol{p},h)|0\rangle \tag{V.114}$$

という関係が成り立つことも容易に確認できる．但し，この場合は第 3 成分も物理的成分であるので，寄与は 0 であっても $a(\boldsymbol{p},h=0)=a(\boldsymbol{p},3)$ とおいて

$$S_h = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{h=0,\pm1} h\, a^\dagger(\boldsymbol{k},h)a(\boldsymbol{k},h) \tag{V.115}$$

と表すのが正確である．

次は複素場だが，容易に確認できるように必要な計算はここまで示した実場とほぼ同じであり，

$$S_h = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{h=0,\pm1} h\,[\,a^\dagger(\boldsymbol{k},h)a(\boldsymbol{k},h) + b^\dagger(\boldsymbol{k},h)b(\boldsymbol{k},h)\,] \tag{V.116}$$

という形が得られる．

上記の $a^{(\dagger)}$，$b^{(\dagger)}$ の組み替えに対応して，偏極ベクトルについても

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},h=\pm1) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\,\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},1) \pm i\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},2)\,],\\ \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},h=0) &= \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},3)\end{aligned} \tag{V.117}$$

と置くと，A^μ の平面波展開はスカラー成分項の寄与を除けば

- 実ベクトル場

$$A^\mu(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{h=0,\pm1} [\,a(\boldsymbol{k},h)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},h)e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k},h)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},h)e^{ikx}\,] \tag{V.118}$$

• 複素ベクトル場

$$A^{\mu}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{h=0,\pm1} \left[\, a(\boldsymbol{k},h)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},h)e^{-ikx} + b^{\dagger}(\boldsymbol{k},h)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k},h)e^{ikx} \,\right] \qquad \text{(V.119)}$$

と書き直される．

<u>電荷演算子</u>

ここではもちろん複素場のみが考察の対象である．一般公式に従えば，位相変換のネータカレントは

$$\theta^{\mu}(x) = -iq : \Big[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}A^{\nu}(x))} A^{\nu}(x) - \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}A^{\nu\dagger}(x))} A^{\nu\dagger}(x) \Big] :$$

となるので，ファインマンゲージに固定したラグランジアンを使えば直ちに電磁カレントと電荷演算子が得られる：

$$\boldsymbol{j}(x) = -iq : \Big[[\nabla A^{\dagger}_{\mu}(x)]A^{\mu}(x) - A^{\dagger}_{\mu}(x)[\nabla A^{\mu}(x)] \Big] : \qquad \text{(V.120)}$$

$$Q = iq \int d^3\boldsymbol{x} : \Big[\dot{A}^{\dagger}_{\mu}(x)A^{\mu}(x) - A^{\dagger}_{\mu}(x)\dot{A}^{\mu}(x) \Big] : \qquad \text{(V.121)}$$

Q を生成消滅演算子で表そう．上記 Q の右辺第 2 項は係数の iq も含めれば第 1 項のエルミート共役（$h.c.$）になっていることに注意して

$$\begin{aligned}
Q &= iq \int d^3\boldsymbol{x} \; :\dot{A}^{\dagger}_{\mu}(x)A^{\mu}(x): + (\ h.c.\ ) \\
&= -q \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\, k^0 \\
&\qquad \times \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} : \Big[\, a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{*}_{\mu}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx} - b(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_{\mu}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} \,\Big] \\
&\qquad\qquad \times \Big[\, a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{q},\tau)e^{-iqx} + b^{\dagger}(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{q},\tau)e^{iqx} \,\Big] : + (\ h.c.\ ) \\
&= -q \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\, k^0 \\
&\qquad \times \sum_{\kappa,\tau=0}^{3} \Big[\, a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{*}_{\mu}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{q},\tau)e^{i(k-q)x} \\
&\qquad\qquad + a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\kappa)b^{\dagger}(\boldsymbol{q},\tau)\varepsilon^{*}_{\mu}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{q},\tau)e^{i(k+q)x} \\
&\qquad\qquad - a(\boldsymbol{q},\tau)b(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_{\mu}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{q},\tau)e^{-i(k+q)x}
\end{aligned}$$

$$-b^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)b(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{q},\tau)e^{-i(k-q)x}\Big] + (\ h.c.\ )$$

（$\boldsymbol{x}$ 積分により指数関数部分から δ 関数が現れ，次に $\boldsymbol{q}$ 積分を実行）

$$\begin{aligned}
= -\frac{1}{2}q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3}\Big[\, & a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\tau)\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\tau)\\
&+ a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)b^\dagger(-\boldsymbol{k},\tau)\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(-\boldsymbol{k},\tau)e^{2ik^0x^0}\\
&- a(-\boldsymbol{k},\tau)b(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(-\boldsymbol{k},\tau)e^{-2ik^0x^0}\\
&- b^\dagger(\boldsymbol{k},\tau)b(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\tau)\Big] + (\ h.c.\ )
\end{aligned}$$

（第 1・4 項に対して (V.15) の関係 $\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda') = g^{\lambda\lambda'}$ を用いて）

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3} g^{\kappa\kappa}\Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) - b^\dagger(\boldsymbol{k},\tau)b(\boldsymbol{k},\kappa)\Big]\\
&\quad - \frac{1}{2}q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa,\tau=0}^{3}\Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)b^\dagger(-\boldsymbol{k},\tau)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^*_\mu(-\boldsymbol{k},\tau)e^{2ik^0x^0}\\
&\qquad\qquad - a(-\boldsymbol{k},\tau)b(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{k},\tau)e^{-2ik^0x^0}\Big] + (\ h.c.\ )
\end{aligned}$$

（第 1 項は ($h.c.$) との足し算で 2 倍され，第 2・3 項は打ち消しあう）

$$= -q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3} g^{\kappa\kappa}\Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) - b^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)b(\boldsymbol{k},\kappa)\Big]$$

ここでも $a(\boldsymbol{k},0)$，$b(\boldsymbol{k},0)$ の寄与はスカラー場と打ち消し合うので

$$\begin{aligned}
Q &= q\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=1}^{3}\Big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)a(\boldsymbol{k},\kappa) - b^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)b(\boldsymbol{k},\kappa)\Big]\\
&= q(N_a - N_b) \qquad\qquad \text{(V.122)}
\end{aligned}$$

（$N_{a,b}$ はスカラー成分・スカラー場を除いた個数演算子）を得る．これは a，b がそれぞれ電荷 $+q$，$-q$ の粒子であることを示している．従って，ここでも $a^{(\dagger)}$，$b^{(\dagger)}$ は粒子・反粒子の生成消滅演算子であることが確認できたことになる．

V.10 生成消滅演算子のローレンツ及び C·P·T 変換性

この場合についても無質量実ベクトル場と同じ考え方でローレンツ及び C·P·T

変換性は調べられるので，以下では異なる点・注意すべき事項についてのみ述べる．

ローレンツ変換

無質量ベクトル粒子は常に光速で運動しており，それを追い越すことはできない．このため，どのような変換を施しても運動量の向きは逆転せず，その結果，ヘリシティも不変である．しかしながら，それは有質量ベクトル場には当てはまらない（物理的自由度も2から3になっている）．従って，演算子の変換性自体は無質量ベクトル粒子の場合と同じように書けても，そこにおける変換行列 $\mathcal{R}$ の表現は同じではないことを忘れてはならない．

C·P·T変換

有質量ベクトル場の代表的粒子は，中性のZボソン Z^μ 及び電荷 $\pm e$（e は陽子電荷）を持つWボソン $W^{\pm\mu}$ である．素粒子物理学の標準理論においては，Zボソンは実ベクトル場 $Z^\mu(x)$，Wボソンは複素ベクトル場 $W^\mu(x)$，$W^{\mu\dagger}(x)$ で記述される．従って，ZボソンのC·P変換性は光子と同様に，またWボソンについてもC変換において粒子・反粒子の関係にある W^+ と W^-（或いは W と $W^\dagger$）が入れ換わる以外は同じように決まると予想されるかも知れないが，現実は以下のように少々複雑である．

標準理論では，Zボソン・Wボソンとディラック粒子の結合は，それぞれ

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{z}(x) = g_z J_\mu^z(x) Z^\mu(x) \tag{V.123}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{W}(x) = g_W J_\mu^W(x) W^\mu(x) + g_W^* J_\mu^{W\dagger}(x) W^{\mu\dagger}(x) \tag{V.124}$$

という相互作用ラグランジアンで与えられる．ここで，J_μ^z（中性弱カレント：Neutral weak current） は

$$V_\mu^z(x) = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):\,, \qquad A_\mu^z(x) = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x):$$

の組み合わせ，また J_μ^W（荷電弱カレント：Charged weak current）は

$$V_\mu^W(x) = :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x):, \qquad A_\mu^W(x) = :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_2(x):$$

の組み合わせであり，この $\mathcal{L}_\mathrm{I}^{Z,W}$ に基づく種々の計算結果は，対応する実験データと高い精度で一致している．ところが，$V_\mu^{Z,W}$，$A_\mu^{Z,W}$ の C·P 変換性は

$$\begin{aligned}\mathcal{C} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x): \mathcal{C}^{-1} &= -:\bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\psi_1(x):,\\ \mathcal{C} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_2(x): \mathcal{C}^{-1} &= :\bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_1(x):\end{aligned} \tag{V.125}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x): \mathcal{P}^{-1} &= :\bar{\psi}_1(\tilde{x})\gamma^\mu\psi_2(\tilde{x}):,\\ \mathcal{P} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_2(x): \mathcal{P}^{-1} &= -:\bar{\psi}_1(\tilde{x})\gamma^\mu\gamma_5\psi_2(\tilde{x}):\end{aligned} \tag{V.126}$$

で決まるため，どちらの変換の下でも $V_\mu^{Z,W}$ と $A_\mu^{Z,W}$ は互いに異なる符号を出す．この結果，その両者と結合するZ，Wボソンの変換性は，C変換に対してもP変換に対しても定義不可能となるのである．特に後者は弱相互作用における**パリティの破れ**（Parity violation）としてよく知られている．

問題 V.24　前章で学んだディラック場のC·P変換性に基づき（V.125, V.126）を導け．

但し，CとPを同時に行う CP 変換の下では，上記の二つのカレントは共に

$$\begin{aligned}(\mathcal{CP})J_\mu^Z(x)(\mathcal{CP})^{-1} &= -J^{Z\mu}(\tilde{x}),\\ (\mathcal{CP})J_\mu^W(x)(\mathcal{CP})^{-1} &= -J^{W\mu\dagger}(\tilde{x})\end{aligned} \tag{V.127}$$

と振る舞うので，Zボソンについては

$$(\mathcal{CP})Z^\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -Z_\mu(\tilde{x}) \tag{V.128}$$

のように，またWボソンについても，もし $g_W = g_W^*$ であるなら

$$(\mathcal{CP})W^\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -W_\mu^\dagger(\tilde{x}) \tag{V.129}$$

と決めることが出来，これから生成消滅演算子の変換性も決められる．

しかしながら，この CP 対称性も $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{W}$ については g_W が虚部を持つと破れてしまうが（つまり，**CP の破れ**：CP violation），更に T 変換も同時に行うと再び対称性は回復する．それは，カレント V_μ^W，A_μ^W の振る舞いが共に

$$\mathcal{T} V_\mu^W(x) \mathcal{T}^{-1} = V^{W\mu}(-\tilde{x}), \quad \mathcal{T} A_\mu^W(x) \mathcal{T}^{-1} = A^{W\mu}(-\tilde{x}) \tag{V.130}$$

であり，かつ T 変換の反線形性より $\mathcal{T} g_W = g_W^* \mathcal{T}$，$\mathcal{T} g_W^* = g_W \mathcal{T}$ となるからである．この CPT 変換の下では Z，W ボソンは次のように振る舞う：

$$(\mathcal{CPT}) Z^\mu(x) (\mathcal{CPT})^{-1} = -Z^\mu(-x), \quad (\mathcal{CPT}) W^\mu(x) (\mathcal{CPT})^{-1} = -W^{\mu\dagger}(-x) \tag{V.131}$$

この最後の対称性は,「局所的な相互作用（時空の 1 点で規定される相互作用）のみを含むローレンツ不変な場の理論体系は常に CPT 不変である」という **CPT 定理**（CPT theorem）の一つの具体例である．

問題 V.25　弱カレントの CP 及び T 変換（V.127, V.130）を確認せよ．

V.11 有質量ベクトル場の伝播関数

有質量ベクトル場の伝播関数も，電磁場と同じく

- 実ベクトル場

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv i \langle 0 | \mathrm{T}\, A^\mu(x) A^\nu(y) \, | 0 \rangle \tag{V.132}$$

- 複素ベクトル場

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv i \langle 0 | \mathrm{T}\, A^\mu(x) A^{\nu\dagger}(y) \, | 0 \rangle \tag{V.133}$$

と定義される．この運動量表示 $D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p)$ を求めよう．但し，定義式に場の運動量展開を代入する方法は無質量ベクトル場と基本的に同じなので，ここでは始めからグリーン関数手法を用いる．

まず，ここでも α を残して正準交換関係を A と $\dot{A}$ で書き改める必要があるが，π^μ を与える式に質量が含まれないため，実ベクトル場については (V.78) と全く同じ関係が得られ，また，複素ベクトル場の場合も $A^\dagger$ と $\dot{A}^\dagger$ が加わること以外の構成は同じとなる：

$$[\,\dot{A}^{\mu\dagger}(x),\, A^\nu(x')\,] = ig^{\mu\nu}[\,1-(1-\alpha)g^{\mu 0}\,]\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$[\,\dot{A}^{0\dagger}(x),\, \dot{A}^i(x')\,] = i(1-\alpha)\partial^i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$[\,A^{\mu\dagger}(x),\, A^\nu(x')\,] = [\,\dot{A}^{0\dagger}(x),\, \dot{A}^0(x')\,] = [\,\dot{A}^{i\dagger}(x),\, \dot{A}^j(x')\,] = 0 \quad \text{(V.134)}$$

この一般化された同時刻交換関係と運動方程式

$$\Big[g_{\mu\nu}(\Box+m^2) - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\Big]A^\nu(x) = 0$$

より，$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x)$ は

$$\Big[g_{\mu\nu}(\Box+m^2) - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\Big]D_{\mathrm{F}}^{\nu\rho}(x) = -g_\mu{}^\rho\delta^4(x) \qquad \text{(V.135)}$$

を満たすことがわかるので，この左辺に

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx} D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k)$$

を，右辺には

$$\delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx}$$

を代入して両辺を比較すれば

$$\Big[-(p^2-m^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu - \frac{1}{\alpha}p_\mu p_\nu\Big]D_{\mathrm{F}}^{\nu\rho}(p) = -g_\mu{}^\rho$$

という関係が得られる．ここでもローレンツ共変性より

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu}A(p^2) + p^\mu p^\nu B(p^2)$$

と書けるのでこれを上の関係式に代入して A, B を決め，仕上げに「$+i\varepsilon$ ルール」を適用して

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} - (1-\alpha)\frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)(p^2 - \alpha m^2 + i\varepsilon)} \tag{V.136}$$

を得る．以上の計算と結果は実場・複素場に共通である．

問題 V.26　複素ベクトル場に対し，一般化された同時刻交換関係（V.134）を確かめよ．

問題 V.27　伝播関数 $D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x)$ が（V.135）式を満たすことを確認せよ．

☆☆☆ ベクトル場の量子化に対する補足 ☆☆☆

この第 V 章においてはベクトル場をスカラー場・ディラック場と同じように正準量子化した．しかしながら，本章の冒頭でも簡単に述べたように，有質量ベクトル場をくりこみ可能な量子論にするためには特別な枠組みが必要である．これについて少し補足しておこう．

現代の素粒子物理学の基礎には「ゲージ理論」があり，そこでは全ての相互作用はそれぞれに固有の群の下での「局所的なゲージ変換」に対する不変性を持つことが要求される．そして，この不変性を実現するには，相互作用ごとに「ゲージ場（粒子)」という力の媒介粒子が必要となるが，その役割を担うのがベクトル場である．更に，このベクトル場に質量を与えようとすれば冒頭で触れた「自発的対称性の破れ（Spontaneous symmetry breakdown)」および「ヒッグス機構（Higgs mechanism)」という理論的枠組みが必要になるのである．

従って，ベクトル場を理論的に首尾一貫した形で扱おうとすれば，始めから相互作用も含めて考えなければならないことになる．しかしながら，量子化が矛盾なく行われたなら，その中で自由場を考えることは構わない．特に朝永-ディラック描像（相互作用描像）に基いて摂動計算を行う場合には，やはり相互作用部分は別扱いとなり，生成消滅演算子を決めるのは自由場の部分である．しかも，上記の手続きで量子化を行ったあと相互作用部分を切り離すと，本章で用いたラグランジアンが現れる．従って，本章で解説した内容は伝播関数も含めそのままゲージ理論における摂動計算に適用できる．

☆☆☆ ☆☆☆

付録 1　γ 行列に関わる公式

ここでは γ 行列関係の主要な公式を本文中には書けなかったものも含めてまとめる．

- γ 行列（$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$）

γ^μ は反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.1}$$

を満たす 4 行 4 列の行列として導入され，γ_5 は

$$\gamma_5 \,(= \gamma^5) \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{A.2}$$

と定義される．ここで $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は**レヴィ-チヴィタ**（Levi-Civita）**テンソル**と呼ばれる 4 階の反対称テンソルで

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}) \equiv \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \rho & \sigma \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

と定義される．つまり，$\{\mu,\nu,\rho,\sigma\}$ が $\{0,1,2,3\}$ の偶（奇）置換なら $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = +(-)1$（但し，これにマイナス符号を付けた定義を採用している文献もある）．従って，その 0123 成分は

$$\varepsilon_{0123}(= -\varepsilon^{0123}) = 1$$

である．

上記の定義式（反交換関係）を満たす γ^μ が一組見つかれば，それから任意のユニタリ変換

$$\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$$

で得られる γ'^μ も全て同じ反交換関係を満たすので，その表示は無数にある訳だが，代表的な表示は γ^0 を対角化する表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

である．これは，**標準表示**（または**ディラック表示**）と呼ばれる．ここで I, O は，それぞれ 2 行 2 列の単位行列と零行列，σ_i は量子力学にも現れるパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

である（$\sigma_{x,y,z}$ はそれぞれ $\gamma^{1,2,3}$ に対応している）．本書では具体的表示が必要な計算においてはこの標準表示を用いている

もう一つの重要な表示は（本文中では使っていないが）γ_5 を対角化する表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & -\sigma_i \\ \sigma_i & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

で，**スピノル表示**（または**カイラル表示**）と呼ばれている．

もちろん両表示の γ^μ もユニタリ変換で結ばれている．事実，

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & -\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

というユニタリ行列を用い，スピノル表示の γ^μ を U, $U^\dagger$ で挟めば標準表示の γ^μ が得られる．

● γ 行列の性質・公式

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0,$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 \tag{A.7}$$

但し，$\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

と定義される．また，(A.7) 式の第 1 および第 2 式は，厳密に書くなら 4 行 4 列の単位行列 I と零行列 O を用いて $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathrm{I}$, $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = \mathrm{O}$ となるが，誤解の恐れは少ないので，簡潔さのため単なる数字を用いた（以下同様）．

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}),$$

$$\mathrm{Tr}(\not a \not b) = 4ab, \quad \mathrm{Tr}(\not a \not b \gamma_5) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma},$$

$$\mathrm{Tr}(\text{ 奇数個の }\gamma\text{ 行列の積 }) = 0,$$

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4, \quad \gamma_\mu \not a \gamma^\mu = -2\not a, \quad \gamma_\mu \not a \not b \gamma^\mu = 4ab, \quad \gamma_\mu \not a \not b \not c \gamma^\mu = -2\not c \not b \not a,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu = g^{\mu\rho}\gamma^\nu + g^{\rho\nu}\gamma^\mu - g^{\mu\nu}\gamma^\rho - i\varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma}\gamma_\sigma\gamma_5 \tag{A.8}$$

ここで，任意の 4 元ベクトル a^μ と γ^μ の内積を

$$a_\mu\gamma^\mu = a\gamma = \not a$$

と記している．

また，4 個の γ 行列およびその独立な組み合わせ $\sigma^{\mu\nu}$(6 個), $i\gamma^\mu\gamma_5$(4 個), γ_5 に単位行列 I を加えた 16 個の行列

$$\mathrm{I}, \qquad \gamma^\mu, \qquad \sigma^{\mu\nu}, \qquad i\gamma^\mu\gamma_5, \qquad \gamma_5 \tag{A.9}$$

は完全系を構成し，任意の (4,4) 行列はこのセットで展開できる．

- レヴィ-チヴィタ テンソル

このテンソルは以下の関係を満たす：

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4!, \qquad \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\tau}\varepsilon_\beta{}^{\rho\sigma\tau} = -3!\, g_{\alpha\beta},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} = -2!\,(g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\rho\sigma\tau}{}^{\mu} = -1!\,(&g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma}g_{\gamma\tau} - g_{\alpha\rho}g_{\beta\tau}g_{\gamma\sigma} + g_{\alpha\tau}g_{\beta\rho}g_{\gamma\sigma} \\ &- g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma}g_{\gamma\rho} + g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau}g_{\gamma\rho} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}g_{\gamma\tau})\end{aligned} \tag{A.10}$$

- パウリ行列 ($\sigma_{x,y,z}$)

パウリ行列についても幾つか公式を与えておこう：

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \{\sigma_i,\, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{A.11}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i)_{ab}(\sigma_i)_{cd} = 2\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd} \tag{A.12}$$

但し，ε_{ijk} は $\varepsilon_{123} = +1$ から決まる 3 階の反対称テンソルで，上述のレヴィ-チヴィタテンソル $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ の $0ijk$ 成分を用いて $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk}$ と表せる．

ディラック場のローレンツ変換行列

第 I 章でディラック方程式に従う波動関数 $\psi(x)$ のローレンツ変換性を調べた際には（I.26）式

$$2[\, S^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha}\,] + g^{\alpha\mu}\gamma^{\nu} - g^{\alpha\nu}\gamma^{\mu} = 0$$

を満たす $S^{\mu\nu}$ は

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}i\sigma^{\mu\nu}$$

であることを十分な説明はせずに与えたので，ここで補足説明をしておこう．

この量は $\psi(x)$ に作用して $\psi(x)$ と同じ 4 行 1 列のスピノルを生み出すものだから 4 行 4 列の行列である．従って，有限個の γ^{μ}，γ_5 行列およびその組み合わせの線形結合として表すことができる．しかも，3 個以上の γ^{μ} の積は上で与えた公式

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} = g^{\mu\rho}\gamma^{\nu} + g^{\rho\nu}\gamma^{\mu} - g^{\mu\nu}\gamma^{\rho} - i\varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma}\gamma_{\sigma}\gamma_5$$

により 2 個以下の積の形に書き直すことができるので，γ^{μ} について 2 次までの可能性を調べればよい．この範囲内では，μ，ν について反対称ということより $S^{\mu\nu}$ の形は

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \qquad \text{または} \qquad (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\gamma_5$$

しかない．ここまで来れば，あとはその係数も含め

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{8}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) \equiv -\frac{1}{4}i\sigma^{\mu\nu}$$

が唯一の解であることは容易に確認できる．[♯A.1]

[♯A.1] 或いは（A.9）が完全系であることを始めから利用すれば $S^{\mu\nu} =$ 定数 $\times\, \sigma^{\mu\nu}$ であることまでは直ちに理解できる．

付録2 ディラック場演算子の規格化

本書では，スカラー場・ディラック場・ベクトル場すべてにおいて共変的規格化を採用した結果，１粒子状態は

$$\langle \boldsymbol{p}, s|\boldsymbol{p}', s'\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{A.13}$$

という関係を満たしているが，異なるテキストではこれ以外の規格化も採用されている．これは上記３種の場すべてに関係しえる事項であるが，特にディラック場の場合は生成消滅演算子と u，v スピノル両方の規格化が絡むため，幾つかの組み合わせが存在する．そこで，代表的なものを比較のため以下で示しておこう．

但し，出発点であるラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial^\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

これより導かれるディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

および正準量子化の反交換関係

$$\{\,\pi_a(x),\,\psi_b(x')\,\} = +i\delta_{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

は上記の規格化問題とは無関係であり，全てのテキストに亙って共通である．

- 共変的規格化

これは既に本文中に何度も現れているが，比較のために示しておく：

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\sum_{\sigma=\pm1}[\,c(\boldsymbol{k},\sigma)u(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx} + d^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)v(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,],$$

$$\{c(\boldsymbol{p},s),\,c^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} = \{d(\boldsymbol{p},s),\,d^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} = (2\pi)^3 2p^0\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s')=2m\delta_{ss'}\,,\qquad \bar{v}(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s')=-2m\delta_{ss'} \tag{A.14}$$

この規格化においては，例えば $\bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)$ を 1 粒子状態 $|\boldsymbol{p},s\rangle$ で挟んだ場合，

$$\langle\boldsymbol{p},s|\bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)|\boldsymbol{p},s\rangle=\bar{u}(\boldsymbol{p},s)\gamma_\mu u(\boldsymbol{p},s) \tag{A.15}$$

が成り立つ.

• 規格化 1： Bjorken-Drell 形式

筆者が院生だった頃の代表的教科書 [10] において採用されている規格であり，また文献 [8] においても用いられている．文献 [6] の著者 Bjorken-Drell を示す意味で BD と表そう.

$$\psi(x)=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{m}{k^0}}\sum_{\sigma=\pm1}\left[\,c_{\rm BD}(\boldsymbol{k},\sigma)u_{\rm BD}(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}+d^\dagger_{\rm BD}(\boldsymbol{k},\sigma)v_{\rm BD}(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,\right],$$

$$\{c_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s),\,c^\dagger_{\rm BD}(\boldsymbol{p}',s')\}=\{d_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s),\,d^\dagger_{\rm BD}(\boldsymbol{p}',s')\}=\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,,$$

$$\bar{u}_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s)u_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s')=\delta_{ss'}\,,\qquad \bar{v}_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s)v_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s')=-\delta_{ss'} \tag{A.16}$$

この規格化では（A.15）に対応して

$${}_{\rm BD}\langle\boldsymbol{p},s|\bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)|\boldsymbol{p},s\rangle_{\rm BD}=\frac{m}{(2\pi)^3p^0}\bar{u}_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s)\gamma_\mu u_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s) \tag{A.17}$$

が成立する．我々の共変的規格化との関係は

$$c(\boldsymbol{p},s)=(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p^0}\,c_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s),\quad u(\boldsymbol{p},s)=\sqrt{2m}\,u_{\rm BD}(\boldsymbol{p},s) \tag{A.18}$$

（$d(\boldsymbol{p},s)$，$v(\boldsymbol{p},s)$ についても同様）である.

• 規格化 2： Itzykson-Zuber 形式

文献 [10] の次に現れた本格的教科書 [11] が用いている規格化である．その著者 Itzykson-Zuber より IZ と表そう.

$$\psi(x)=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\frac{m}{k^0}\sum_{\sigma=\pm1}\left[\,c_{\rm IZ}(\boldsymbol{k},\sigma)u_{\rm IZ}(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx}+d^\dagger_{\rm IZ}(\boldsymbol{k},\sigma)v_{\rm IZ}(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,\right],$$

$$\{c_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s),\ c^\dagger_{\rm IZ}(\boldsymbol{p}',s')\} = \{d_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s),\ d^\dagger_{\rm IZ}(\boldsymbol{p}',s')\} = (2\pi)^3\frac{p^0}{m}\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),$$

$$\bar{u}_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s)u_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s') = \delta_{ss'}, \quad \bar{v}_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s)v_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s') = -\delta_{ss'} \tag{A.19}$$

この規格化では（A.15）に対応して

$${}_{\rm IZ}\langle\boldsymbol{p},s|\bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)|\boldsymbol{p},s\rangle_{\rm IZ} = \bar{u}_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s)\gamma_\mu u_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s) \tag{A.20}$$

が成立しており，また共変的規格化とは

$$c(\boldsymbol{p},s) = \sqrt{2m}\,c_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s), \quad u(\boldsymbol{p},s) = \sqrt{2m}\,u_{\rm IZ}(\boldsymbol{p},s) \tag{A.21}$$

という関係で結ばれる．

- 規格化 3： Peskin-Schroeder 形式

Peskin-Schroeder による教科書 [12] の規格化である．これは PS と表すことにする．

$$\psi(x) = \int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2k^0}}\sum_{\sigma=\pm1}[\,c_{\rm PS}(\boldsymbol{k},\sigma)u_{\rm PS}(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-ikx} + d^\dagger_{\rm PS}(\boldsymbol{k},\sigma)v_{\rm PS}(\boldsymbol{k},\sigma)e^{ikx}\,],$$

$$\{c_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s),\ c^\dagger_{\rm PS}(\boldsymbol{p}',s')\} = \{d_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s),\ d^\dagger_{\rm PS}(\boldsymbol{p}',s')\} = (2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),$$

$$\bar{u}_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s)u_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s') = 2m\delta_{ss'}, \quad \bar{v}_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s)v_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s') = -2m\delta_{ss'} \tag{A.22}$$

この本では 1 粒子状態は $|\boldsymbol{p},s\rangle = \sqrt{2p^0}c^\dagger_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle$ で定義されるので

$${}_{\rm PS}\langle\boldsymbol{p},s|\bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)|\boldsymbol{p},s\rangle_{\rm PS} = \bar{u}_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s)\gamma_\mu u_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s) \tag{A.23}$$

すなわち（A.15）と同じ形の式が得られる．但し，共変的規格化との関係は

$$c(\boldsymbol{p},s) = \sqrt{2p^0}\,c_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s), \quad u(\boldsymbol{p},s) = u_{\rm PS}(\boldsymbol{p},s) \tag{A.24}$$

である．

あとがき

本書のような内容のテキストをまとめたいと思い始めたのは何時の頃からだったろう．今となってははっきりとは思い出せないが，ともかく，ある日突然「よし，書くぞ！」と決めたのではないことだけは確かだ．何故そんなに自信をもって断言できるかと言うと，自分の性格からして，白紙の状態でそのような決断をしても実行できるとは到底思えないからである … そんな情けないことを自信満々に言うな！と突っ込まれそうだが …．実際，これまでも，出版したテキストであれ学生に配布するプリントであれ，短い講義ノートのような形で少しずつ作成作業を進めていって，ある段階に達して初めて「これなら全体を一つにまとめられるかな」と考え始めるのが典型的パターンである．

で，その本書だが，執筆動機は拙著「場の量子論」（吉岡書店）にある．その本（以下「前著」と呼ぶことにする）は，場の量子論全般を包括的に解説したものではなく，共変的な摂動計算の具体的解説に的を絞ったものだった．その狙い自体は間違ってはいなかったと今でも確信しているし，事実，前著は特色のあるテキストとして評価され，多くの方々に読んで頂けている．ただ，その中で，スカラー場以外の量子場については，詳しい解説をすることなく主要な公式を中心とする要約を与えるにとどめた．また，本文中ではなく付録においてとは言え，種々の場の生成消滅演算子の CPT 変換性を詳しい導出過程を示すことなく与え，さらに幾つかの遷移行列要素を関係づける計算において使用した．

もちろん手を抜いたつもりは毛頭なく，そのような構成・記述としたことに対してもそれなりの理由はあった．すなわち，前著を準備した時点では，場の演算子自体の解説は既に存在する多くの本格的教科書で当然行われているということで，むしろ簡潔に全体を構成するという観点からそのような方針を採ったのだが，それが何時の頃からか気になり始めた．そして，そのような状態で改めて他の標準的テキストを眺めてみると，基本中の基本であるスカラー場，ディラック場，ベクトル場の基礎的性質を全て同じように記述し，基礎的な公式を導出しているテキストは，実はそれほど多くはないようにも感じられ始めた．こう考えて前著の執筆作業を振り返ってみると，確かに様々な公式を整理した際に，多くのテキストを開いて比較する作業が必要だったことも思い出された．

このような理由で本書が生まれたのだが，それでもこんな基本的な事項を何度も繰り返し説明する必要があるのかという批判も当然あるだろう．しかしながら，そういう解説を必要とする学生も少なからず存在すると筆者は確信している．本書は正にそのような諸君のためのテキストであると受けとめて頂ければと思う．事実，筆者自身そのよ

うな学生だったし，本書は，正に自分が学生だった頃に「こんな本があれば…」と考えた本でもある．尤も，いくら偉そうに語っても，こういう筆者の考えが本書においてどこまで実現されているか，またそもそも筆者のような考えがどれほどの方々に受け入れられるかは簡単に予測できることではない．まずは多くの読者のご批評・ご批判を待ちつつ，前著「場の量子論」の姉妹版として役立てて貰えることを願う次第である．

引用文献

[1] 「An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory」(S.S. Schweber 著：Harper & Row)

[2] 「Relativistic Quantum Mechanics」(W. Greiner 著：Springer)

[3] 「古典論・量子論での変換とは何だろうか？」大貫義郎，素粒子論研究 **104** (2002), 113-135

[4] 「ゲージ場の量子論 I・II」(九後汰一郎 著：培風館)

[5] 「場の量子論」(大貫義郎 著：岩波書店)

[6] 「量子力学」(河原林研 著：岩波書店)

[7] 「ポアンカレ群と波動方程式」(大貫義郎 著：岩波書店)
また，同じ著者による文献 [5] も参考になる．

[8] 「場の量子論」(中西襄 著：培風館)

[9] 「Field Quantization」(W. Greiner, J. Reinhardt 著：Springer)

[10] 「Relativistic Quantum Fields」(J.D. Bjorken, S.D. Drell 著：McGraw-Hill Inc.)

[11] 「Quantum Field Theory」(C. Itzykson, J-B. Zuber 著：McGraw-Hill Inc.)

[12] 「An Introduction to Quantum Field Theory」(M.E. Peskin, D.V. Schroeder 著：Addison Wesley)

参考図書

前著においても幾つかの関連図書は紹介したので，ここでは主として前著以降に出版されたものを紹介する．但し，参考までに前著で紹介した図書も（コメントなしで）再掲しておく．

場の量子論全般に亙る話題を簡潔にカバーしたものとして

- 「場の量子論」（坂井典佑 著：裳華房）

同じく場の量子論全般をカバーし，さらに超伝導や量子ホール効果など物性論的話題にも触れた特色あるテキストは

- 「場の量子力学」（石川健三 著：培風館）

演習スタイルで解説を進めるユニークなスタイルの教科書として

- 「演習場の量子論—基礎から学びたい人のために」（柏太郎 著：サイエンス社）

がある．

- 「相対論的物理学のききどころ」（和田純夫 著：岩波書店）

は前著より先に出版されている．前著では少々扱う事項が異なるということで紹介を控えたが，本書とは共通する話題も少なくないので参考図書に加えたい．

場の量子論は，物性物理においても重要とは言いつつも，本書が扱った相対論的量子場が活躍するのは（今のところ）やはり素粒子物理学である．その意味で，素粒子物理学の教科書も紹介しておこう．

- 「素粒子物理入門—基本概念から最先端まで」（渡辺靖志 著：培風館）
- 「素粒子物理学」（原康夫 著：裳華房）
- 「素粒子物理学」（原康夫，青木健一郎，稲見武夫 著：朝倉書店）
- 「例題形式で学ぶ現代素粒子物理学」（川村嘉春 著：サイエンス社）
- 「素粒子物理学の基礎 I・II」（長島順清 著：朝倉書店）

この大著も前著より若干早く出版されたが，その時点で前著原稿もほぼ完成されており文献リストに加えることは出来なかったという経緯がある．

- 「超対称性」（太田信義，坂井典佑 著：サイエンス社）

☆☆☆ 前著において紹介した参考図書

- 「相対論的量子力学」(森田正人, 森田玲子 著: 共立出版)
- 「Quantum Field Theory」(C. Itzykson, J-B. Zuber 著: McGraw-Hill Inc.)
- 「場の量子論 (全 4 巻)」(S. Weinberg 著, 青山・有末共訳: 吉岡書店)
- 「Quantum Field Theory」(F. Mandl, G. Shaw 著: John Wiley and Sons Ltd.)
- 「Field Quantization」(W. Greiner, J. Reinhardt 著: Springer)
- 「場の理論計算入門」(A.N. Kamal 著, 高橋訳: 講談社)
- 「ゲージ場の量子論 I・II」(九後汰一郎 著: 培風館)
- 「An Introduction to Quantum Field Theory」(M.E. Peskin, D.V. Schroeder 著: Addison Wesley)
- 「Gauge theory of elementary particle physics」(T-P. Cheng, L-F. Li 著: Oxford Univ. Press)
- 「クォークとレプトン」(F. Halzen, A.D. Martin 著, 広瀬・小林共訳: 培風館)

索引

欧字

あ 行

さ　行

た 行

著者略歴

日置　善郎（ひおき　ぜんろう）

1951年7月：岐阜県（郡上八幡）に生まれる
　　　　岐阜北高から京大理学部を経て
1980年：京大大学院博士課程修了（理学博士）
　同年：学振奨励研究員（京大基礎物理学研究所）
1984年：徳島大学教養部講師
1986年：日米科学技術協力研究員（スタンフォード大学）
　同年：独・フンボルト財団研究員（マックス-プランク研究所）
1994年：同研究員（ミュンヘン工科大学）
　現在：徳島大学大学院ソシオアーツ＆サイエンス研究部教授
　専攻：理論物理学（素粒子論）
　　　（主要著書）
　　　"Electroweak Theory"
　　　Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 73 1982
　　　（共著，理論物理学刊行会）
　　　"場の量子論"（吉岡書店）1999, 同改訂版 2004
　　　"量子力学"（吉岡書店）2001

相対論的量子場　　2008 ©

2008 年 10 月 15 日　第 1 刷発行
2009 年 7 月 25 日　第 2 刷発行

著　者　日　置　善　郎
発行者　吉　岡　　誠

〒 606-8225 京都市左京区田中門前町 87
株式会社　吉　岡　書　店
電話(075)781-4747/ 振替　01030-8-4624

印刷・製本亜細亜印刷㈱

ISBN4-8427-0346-6